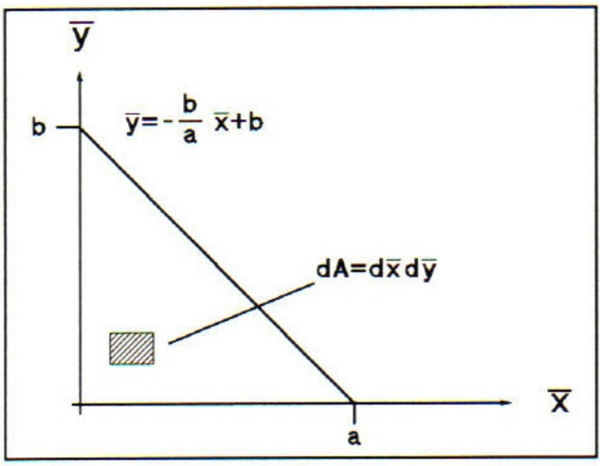
FH Frankfurt am Main
University of Applied Sciences
Fachbereich 2 - Informatik und Ingenieurwissenschaften
TM2 SS 2007
Dr. Ing. Wilfried Dankmeier

Frankfurt am Main, 29.04.2007

Berechnung eines Doppelintegrals



Bei "gemischten" Integranden, wie sie im Deviationsmoment

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = -\int_{(A)} \bar{x}\,\bar{y}\;dA \quad \textit{vorkommen,}$$

ist die Vereinfachung des Doppelintegrals über **dxdy = A** zu einem nur über $d\bar{x}$ oder nur über $d\bar{y}$ laufenden Einfachintegral <u>nicht</u> möglich. Deshalb muß hier das Doppelintegral

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = -\int_{\bar{x}} \int_{\bar{y}} \bar{x}\,\bar{y}\;d\bar{x}\;d\bar{y}$$

gelöst werden.

Dazu sind zwei Schritte notwendig:

1.) Umordnen der Variablen so, daß ein inneres Integral mit nur einer Variablen entsteht, z.B. nur mit $\bar{y}$:

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = \left(-\int \bar{x}\left[\int \bar{y}\;d\bar{y}\right]d\bar{x}\right)_{(A)} = -\int_0^a \bar{x}\left[\int_0^{\bar{y}\,=\,b-\frac{b}{a}\bar{x}} \bar{y}\;d\bar{y}\right]d\bar{x}$$

2.) Festlegen der Integrationsgrenzen; das innere Integral enthält dabei $\bar{x}$ in seiner oberen Grenze, so daß $\bar{x}$ nach Auswertung des inneren Integrals als Variable in das äußere Integral eingeht.

Nun wird zunächst das innere Integral gelöst :

$$\int_0^{b-\frac{b}{a}*\bar{x}} \bar{y}\;d\bar{y} = \left.\frac{\bar{y}^2}{2}\right]_0^{b-\frac{b}{a}*\bar{x}} = \frac{\left(b-\frac{b}{a}*\bar{x}\right)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}\left(b^2 - \frac{2b^2}{a}\bar{x} + \left(\frac{b}{a}\bar{x}\right)^2\right)$$

Das Ergebnis ist Bestandteil des äußeren Integrals, das jetzt nur noch die Variable $\bar{x}$ enthält:

$$I_{\bar{x}\bar{y}} = -\int_0^a \bar{x}\;\frac{1}{2}\left(b^2 - \frac{2b^2}{a}\bar{x} + \frac{b^2}{a^2}\bar{x}^2\right)d\bar{x} = -\left[\frac{\bar{x}^2*b^2}{4} - \frac{\bar{x}^3*b^2}{3a} + \frac{\bar{x}^4*b^2}{8a^2}\right]_0^a$$

$$= -\frac{a^2*b^2}{24}$$