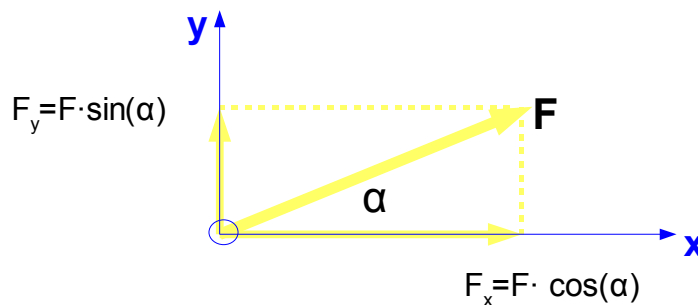


Kleine Formelsammlung zu TM1 (Statik)

Version 6 vom 05.12.2006

1. Kräfte

Kräfte werden mathematisch als Vektoren beschrieben. Ein Kraftvektor F in der Zeichenebene kann bezüglich eines willkürlich mit der x,y -Achse in die Zeichenebene gelegten rechtwinkligen, rechtsdrehenden x,y,z -Koordinatensystems (z -Achse dann nach vorn senkrecht aus der Zeichenebene heraus) nach dem Axiom 2 in seine beiden Komponenten F_x und F_y zerlegt werden:



mit Betrag und Winkel $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, $\alpha = \arctg \frac{F_y}{F_x}$. Bei einer räumlich angeordneten Kraft wäre der Betrag entsprechend aus 3 Komponenten zusammensetzbar: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$. Die Angabe der räumlichen Winkel ist in diesem Fall etwas aufwändiger und wird hier vorerst auch nicht benötigt.

2. Umrechnung der Winkel von α (in Grad) in x (als Bogenmaß)

$$\alpha(\text{Grad}) = x(\text{Bogenmaß}) \cdot \frac{180}{\pi}, \quad x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$$

3. Trigonometrische Umformungen

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha), \quad \cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta), \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

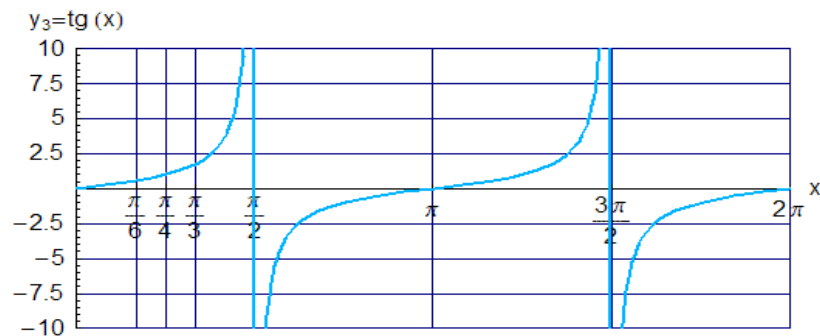
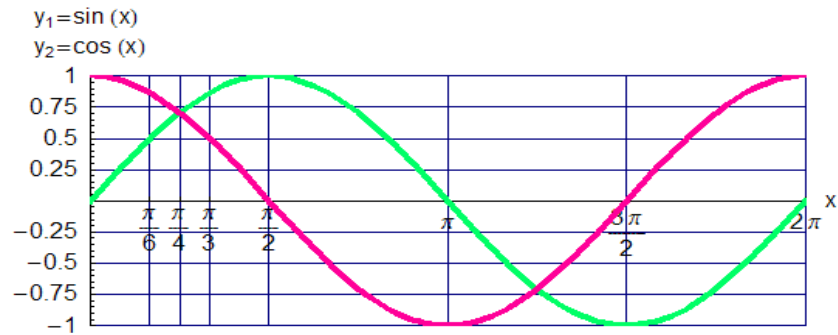
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta), \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

4. Oft gebrauchte Werte

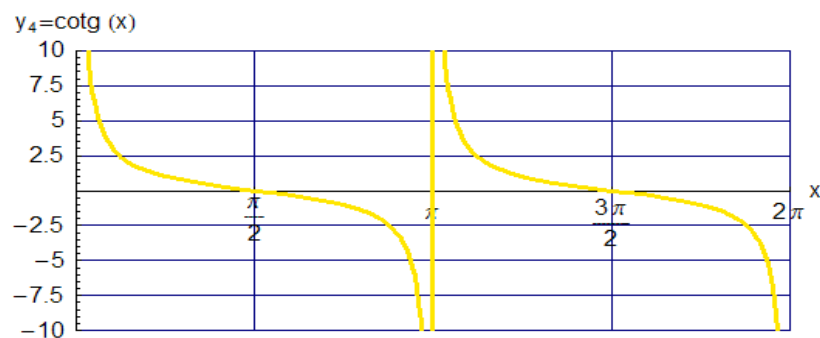
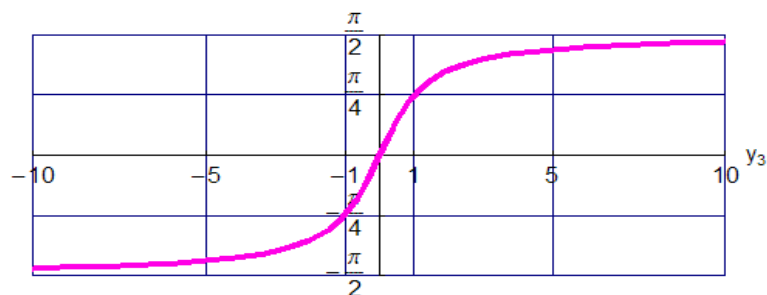
$$\sin(30) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos(60) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin(45) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(45) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(60) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(30) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{tg}(30) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{tg}(45) = 1, \quad \text{tg}(60) = \sqrt{3}.$$

5. Trigonometrische Funktionen



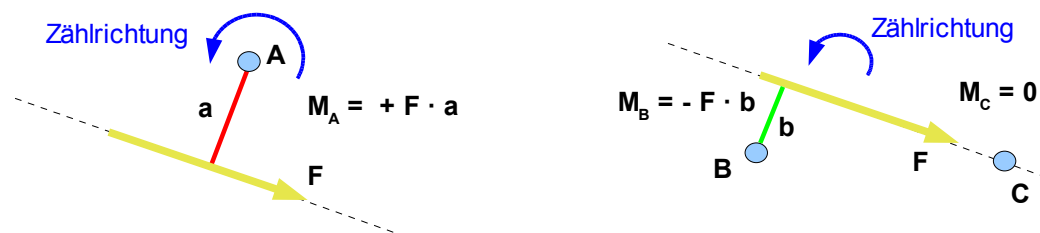
$x = \text{arctg}(y_3)$, Umkehrfunktion zu $\text{tg}(x)$



6. Momente

Kraftvektoren haben im allgemeinen neben der ziehenden oder drückenden Wirkung auf einen starren Körper auch einen drehenden Einfluss, und zwar immer dann, wenn ihre Wirkungslinie nicht durch den Massenschwerpunkt des Körpers oder durch einen seiner Befestigungspunkte auf einer starren Unterlage (Erdboden, Hauswand, Maschinenrahmen und ähnliches) geht.

Das (Dreh-) Moment berechnet sich als Produkt aus Kraft F mal Hebelarm a , wobei der Hebelarm a die kürzeste Verbindung zwischen dem **Momenten-Bezugspunkt** A und der Wirkungslinie der Kraft darstellt. Der wirksame Hebelarm steht also **senkrecht** auf der Wirkungslinie.



Auch das Moment stellt, wie die Kraft, eine vektorielle Größe mit Betrag, Richtung und Richtungssinn dar. Der **Momentenvektor** M_A (oder M_B) steht senkrecht auf der durch F und a aufgespannten Ebene, hier senkrecht zur Zeichenebene. Der Richtungssinn ergibt sich durch die physikalische Drehrichtung, in der Skizze also gegen den Uhrzeigersinn. Er kann für Rechenzwecke - wie der Richtungssinn der Kraftvektoren - zunächst aber **willkürlich** festgelegt werden. Das Moment M_B hat, bezogen auf die Zählrichtung ein **negatives** Vorzeichen, M_C ist 0, da die Wirkungslinie des Kraftvektors durch den Momentenbezugspunkt geht.

Im Unterschied zum Kraftvektor F , der nach Axiom 1 nur auf seiner Wirkungslinie verschoben werden darf, lässt sich ein Momentenvektor beliebig parallel zur seiner Wirkungslinie verschieben, ohne dass sich nach aussen etwas ändert, hier **senkrecht** zur Zeichenebene.

Vorzeichenregelung für die Momenten-Berechnung mit Kraft F und Hebelarm a um einen Bezugspunkt P , positive Drehrichtung willkürlich festgelegt:

$$M_P = \text{Vorzeichen}_{\text{gemäß}_D\text{rehrichtung}_u\text{m}_P} \cdot |F| \cdot |a|$$

Hinweis für TM-Freaks (sofern es diese gibt ..., alle anderen bitte bei **Punkt 7** weitermachen): Das Moment wird im allgemeinen Fall als vektorielles oder Kreuz-Produkt aus Kraftvektor F und Ortsvektor r (Vektor vom Bezugspunkt P zu *irgendeinem* Punkt auf der Wirkungslinie) beschrieben:

$$\vec{M}_P = \vec{F} \cdot \vec{r}, \quad \text{Betrag: } M_P = |\vec{M}_P| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin(\text{Winkel zwischen } \vec{F} \text{ und } \vec{r})$$

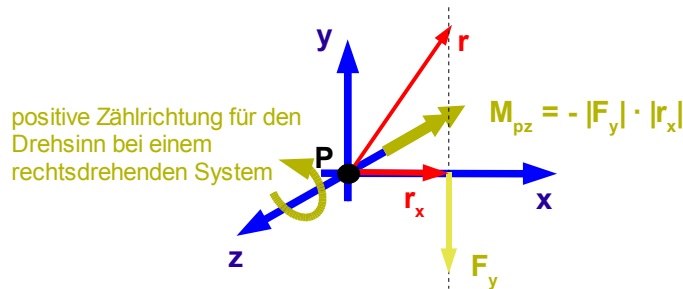
Liegen F und r bei einem **rechtsdrehenden** Koordinatensystem in der x - y -Ebene, so liegt M_P parallel zur z -Achse. Bei Komponentendarstellung von F und r ergibt sich aus der oben angegebenen Formel:

$$M_{Pz} = |F_x| \cdot |r_y| \cdot \sin(\text{Winkel zwischen } F_x \text{ und } r_y) + |F_y| \cdot |r_x| \cdot \sin(\text{Winkel zwischen } F_y \text{ und } r_x)$$

Die Winkel sind in diesem Fall entweder 0 (Wirkungslinie geht durch P) oder Vielfache von 90° . Der Winkel ergibt sich, wenn man den Ortsvektor im Uhrzeigersinn in die Wirkungslinie eindreht. Bei 90° ist das Vorzeichen $+1$, bei 180° entsteht wieder 0, bei 270° erhält man -1 usw.

Im unten stehenden Bild ist ein Vektor F gezeigt, der nur aus der y -Komponente besteht. Der Ortsvektor r geht vom willkürlich gewählten Bezugspunkt P (hier zufällig zugleich Koordinaten-Nullpunkt) auf einen beliebigen

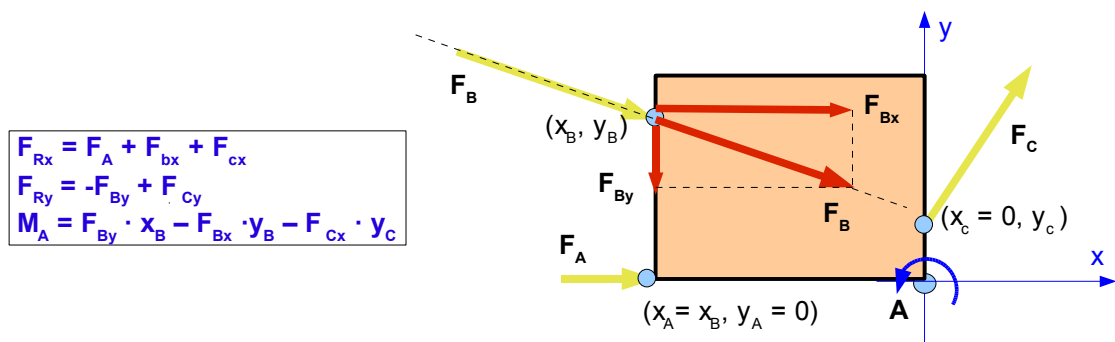
Punkt der Wirkungslinie, die zu F_y senkrechte Komponente r_x ist der Hebelarm. Das Produkt des Betrages von $F_y \cdot r_x$ bildet den Betrag M_{pz} des Momentenvektors. Das Vorzeichen ergibt sich als negativ entweder bezogen auf den eingezeichneten Richtungssinn oder durch Bestimmung des „Eindrehwinkels“ von r_x in F_y im Uhrzeigersinn. Dieser Eindrehwinkel beträgt hier 270° (man muss für den Uhrzeigersinn in Richtung der z-Achse sehen!), $\sin(270^\circ) = -1$. Daher wirkt M_{pz} in Richtung der **negativen** z-Achse.



(Ende des Hinweises für TM-Freaks)

7. Allgemeine ebene Kraftsysteme

Diese sind gekennzeichnet durch die resultierende Kraft F_R aller am starren Körper angreifenden Kräfte sowie durch die Drehwirkung von F_R bezüglich eines physikalisch gegebenen oder willkürlich festgelegten Bezugspunktes A. Die Berechnung von F_R und des Momentes wird vereinfacht, wenn man zunächst **willkürlich** ein Koordinatensystem und eine positive Drehrichtung vorgibt und dann die Summe aller x- und y-Komponenten der Kräfte sowie die Summe aller Momentenbeiträge dieser Komponente bezüglich des Punktes A bestimmt.



Tipp: Wenn die Koordinaten bezüglich des (x,y)-Systems eines Punktes auf der Wirkungslinie eines Kraftvektors gegeben sind, wie hier z. B. für F_B mit (x_B, y_B) , dann ist es am einfachsten, wenn man zur Berechnung des Momentenbeitrages die Komponenten dieses Kraftvektors bestimmt und mit den zugehörigen Koordinatenwerten multipliziert, da diese unmittelbar die Hebellänge angeben.

8. Mittelpunkte, Schwere-Linien und Schwerpunkte (Sonderfälle allgemeiner Kräftesysteme für parallele Wirkungslinien)

Unter bestimmten Bedingungen ist es sinnvoll und notwendig, bei starren oder nicht starren Körpern oder Körperverbänden nach ausgewählten Linien oder Punkten zu fragen. Solche Punkte können sein:

- **Schwerpunkte** = Gewichts-Mittelpunkte (abhängig von der Materialzusammensetzung und

Dichteverteilung)

und die daraus ableitbaren Sonderfälle

- **Volumen-Mittelpunkte** (unabhängig von der Materialzusammensetzung)
- **Schwere-Linien**, z. B. als Wirkungslinien resultierender Gewichtskräfte von Linienlasten bei Schnee-, Sand- oder Kies-Schüttungen (abhängig von der Materialzusammensetzung und Dichteverteilung)

Der Schwerpunkt eines Körpers oder Körperverbandes ist der Schnittpunkt der Wirkungslinien seines Gewichtskraftvektors in allen möglichen Lagen dieses Körpers.

Sind für einen starren Verband von n Körpern die Teil-Volumina V_i , die Dichten ρ_i und die Teil-Schwerpunkte $(x_{s_i}, y_{s_i}, z_{s_i})$ gegeben, so berechnet sich der Gesamtschwerpunkt aus

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot g \cdot x_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot g}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot g \cdot y_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot g}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot g \cdot z_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot g}$$

Da die Erdbeschleunigung g in jedem Term von Zähler und Nenner auftritt, vereinfachen sich diese Formeln zu:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot x_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot y_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot z_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i}$$

Für das Produkt aus Volumen V_i und Dichte ρ_i kann auch die Masse $m_i = V_i \cdot \rho_i$ eingesetzt werden:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_{s_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_{s_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot z_{s_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Für den Sonderfall von Teilkörpern gleicher Dichte $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = \rho$ wird der Schwerpunkt zum **Volumen-Mittelpunkt**.

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot x_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot y_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot z_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

Bei **symmetrischen Körpern** liegen die Schwerpunktkoordinaten immer auf den Symmetrieachsen.

Bei Körpern oder Körperverbänden **gleicher Dicke d** liegt der Schwerpunkt einer der drei Koordinaten auf dem halben Dickeabstand, z. B. bei $z_s = d/2$. Insbesondere bei sehr dünnen Körpern oder Körperverbänden (etwa bei Blechen oder Platten) interessiert dann nur noch der **Flächenschwerpunkt** in zwei Koordinaten, z. B.:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot x_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i \cdot y_{s_i}}{\sum_{i=1}^n V_i \cdot \rho_i} \quad \text{oder} \quad x_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_{s_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_{s_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Mit folgendem Schema kann man sich die Berechnung der Schwerpunktkoordinaten noch vereinfachen (hier für den Flächenschwerpunkt, für andere Mittelpunkte ist es entsprechend zu ändern/erweitern):



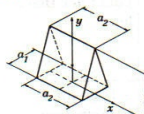
Index	x_{s_i}	y_{s_i}	A_i	$x_{s_i} \cdot A_i$	$y_{s_i} \cdot A_i$
1	x_{s_1}	y_{s_1}	A_1	$x_{s_1} \cdot A_1$	$y_{s_1} \cdot A_1$
2	x_{s_2}	y_{s_2}	A_2	$x_{s_2} \cdot A_2$	$y_{s_2} \cdot A_2$
...
n	x_{s_n}	y_{s_n}	A_n	$x_{s_n} \cdot A_n$	$y_{s_n} \cdot A_n$
			$\sum_{i=1}^n A_i$	$\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{s_i}$	$\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{s_i}$

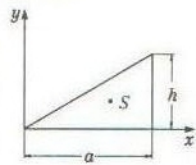
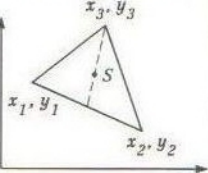
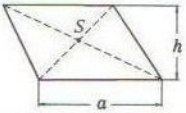
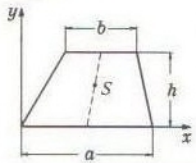
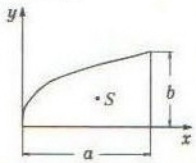
$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{s_i}}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{s_i}}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

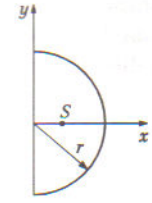
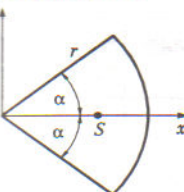
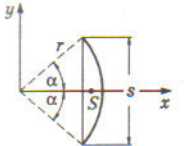
Tip: Wenn in den Flächenstücken Bohrungen, Stanz-Ausbrüche oder an den Rändern Abkantungen vorkommen, kann man weitere Vereinfachungen erzielen, wenn man die unbehandelte Fläche ansetzt und die damit zu viel einbezogenen Stücke als **negative** Beiträge in die Tabelle aufnimmt (z. B. bei den Aufgaben 11 und 12 mit Vorteil verwendbar).

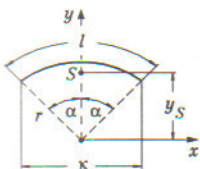
9. Oft gebrauchte Schwerpunkt-Koordinaten

(aus Kühlnhorn/Silber „Technische Mechanik – Formelsammlung“, Fachhochschulverlag Band 84, ISBN 3-923098-84-7)

Körper	Volumeninhalt V	Schwerpunktlage
Kegel 	$\frac{1}{3} \pi r^2 h$	$y_s = \frac{1}{4} h$
Halbkugel 	$\frac{2}{3} \pi r^3$	$y_s = \frac{3}{8} r$
Keil 	$(2a_1 + a_2) a_1 \frac{h}{6}$	$y_s = \frac{h}{2} \frac{a_1 + a_2}{2a_1 + a_2}$

Fläche	Flächeninhalt A	Schwerpunktlage
rechtwinkliges Dreieck 	$\frac{1}{2}ah$	S liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $x_S = \frac{2}{3}a$ $y_S = \frac{h}{3}$
beliebiges Dreieck 	$\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$	S liegt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $x_S = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ $y_S = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$
Parallelogramm 	ah	S liegt im Schnittpunkt der Diagonalen
Trapez 	$\frac{h}{2}(a+b)$	S liegt auf der Seitenhalbierenden $y_S = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}$
quadratische Parabel 	$\frac{2}{3}ab$	$x_S = \frac{3}{5}a$ $y_S = \frac{3}{8}b$

Fläche	Flächeninhalt A	Schwerpunktlage
Halbkreis 	$\frac{\pi}{2} r^2$	$x_S = \frac{4r}{3\pi}$
Kreisausschnitt 	αr^2	$x_S = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Kreisabschnitt 	$\frac{1}{2} r^2 (2\alpha - \sin \alpha)$	$x_S = \frac{s^3}{12A}$ $= \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$

Linie	Länge l	Schwerpunktlage
Kreisbogen 	$l = 2\alpha r$	$y_S = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = r \frac{\kappa}{l}$

10. Gleichgewicht allgemeiner ebener Kräftesysteme

In den Aufgaben 5 und 6 – sowie indirekt zur Schwerpunkt- oder Mittelpunkt-Berechnung auch in den Aufgaben 9, 10, 11, 12 und 13 – wurden für die an einem starren Körper angreifenden äußeren Kraftwirkungen (Einzelkräfte und Einzelmomente) die **Resultierenden** gesucht. Sind Körper in irgendeiner Weise beweglich angeordnet, so werden die resultierenden Kraftwirkungen im allgemeinen auch verschiebende und/oder drehende Bewegungen dieser Körper auslösen (Translationen und Rotationen). Als **Reaktionswirkungen** entstehen dabei nach dem vierten Axiom Trägheits- und Reibungskräfte (z. B. durch den Strömungswiderstand der Luft).

Ist der starre Körper aber durch Befestigungen mit einem Fundament (z. B. Erdboden, Wand, Maschinenrahmen) verbunden, welches jede Bewegung verhindert, so entstehen nach Axiom 4 in den Befestigungen statische **Reaktionskräfte** und/oder **Reaktionsmomente**.

In beiden Fällen ist die Summe aller äußeren und aller reaktiven Kraftwirkungen Null (vergleichbar dem Kirchhoff'schen Gesetz für die Stromsumme in einem elektrischen Knotenpunkt). Für ebene Anordnungen wird dies in einem willkürlich festgelegten x-y-Koordinatensystem durch folgende 3 Gleichgewichtsbedingungen (= GGB's) beschrieben:

$$\sum_{i=1}^m F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^p M_{Ai} = 0, \quad (A \text{ ist ein willkürlicher Bezugspunkt})$$

In der Statik kann man diese 3 GGB's verwenden, um insgesamt 3 unbekannte Kraftwirkungen zu berechnen, z. B. 3 Stab-/Seil-Kräfte, siehe **Aufgaben 1 und 7**.

Tip: Statt einer oder zwei GGB's für die Kraftkomponenten ist es bisweilen weniger aufwändig, ein oder zwei zusätzliche GGB's für die Momente aufzustellen. Insgesamt stehen bei ebenen Aufgabenstellungen aber immer höchstens nur 3 GGB's zur Verfügung!

11. Lagertypen

Für statische Zwecke können – und müssen auch oft – die Befestigungen von Bau- und Maschinenteilen verschieden ausgeführt werden. **Abstrahierend** ordnet man ihren Eigenschaften verschiedene Lagertypen zu. In der Ebene sind dies:

- **einwertige** Lager (= **Loslager**) können Kraftwirkungen nur in einer Komponente aufnehmen
- **zweiwertige** Lager (= **Festlager**) können Kraftwirkungen in zwei Komponenten aufnehmen
- **dreiwertige** Lager (= **feste Einspannung**) können Kraftwirkungen in drei Komponenten aufnehmen.

12. Gleichgewicht und Lagertypen – statisch bestimmte Lagerung in der Ebene

Die notwendige Bedingung für eine statisch bestimmte Lagerung eines starren Körpers ist, dass den 3 unbekanntem Reaktionskräften genau 3 GGB's gegenüberstehen. Dies kann durch

- ein 3-wertiges Lager
- die Kombination eines 2-wertigen und eines 1-wertigen Lagers
- die Kombination von drei 1-wertigen Lagern

sichergestellt werden. **Allerdings gilt die Umkehrung nicht:** Drei 1-wertige Lager garantieren keine statisch bestimmte Lagerung, z. B. dann, wenn die Wirkungslinien aller Reaktionskräfte parallel sind. Das Gleichungssystem aus 3 Gleichungen für 3 Unbekannte ist dann nicht lösbar, weil es ein oder zwei abhängige Gleichungen enthält.

13. Unter- und überbestimmte ebene Lagerungen

Eine ebene 2-wertige Lagerung ist **statisch unterbestimmt**, da sie die Bewegung der Konstruktion in einer Koordinate gestattet, z. B. eine Bewegung in x- oder y-Richtung oder eine Drehung. **Statische Überbestimmtheit** liegt vor, wenn ein ebenes System durch mehr als ein 3-wertiges Lager festgelegt ist. Mit den Mitteln der Statik allein können die Lagerreaktionen dann nicht mehr bestimmt werden, oft aber mit Hilfe der **Elastostatik**, weil dann zusätzlich Materialbedingungen hinzuziehbar sind.