Elektrotechnik Grundlagen

Versuch eines „Roten Fadens“ für die Veranstaltung im SS 2008/WS2008

Stand: 12.11.2008 (Kapitel 5.8)

Zweck: Protokoll-ähnliche Zusammenfassung von Begriffen, Definitionen und Formeln als Rahmen zur Vorlesung.

Grob-Gliederung bei 4 SWS (= 1 Veranstaltung) und 19,5 Veranstaltungen, jeweils Theorie und Übungen:

- Physikalische Grundbegriffe (1,5 Veranstaltung)
- Spannung, Strom, Widerstand, Netzwerkberechnung (5 Veranstaltungen bis 30.April)
- Elektrisches Strömungsfeld (2 Veranstaltungen 14./28. Mai)
- Elektrostatisches Feld (2 Veranstaltungen 04./11.Juni 2008)
- Magnetisches Feld (2 Veranstaltungen, 18./25. Juni)
- Klausurvorbereitung für Studiengänge **M** und **MF**: 01. Juli, 5. + 6. Stunde (1 Veranstaltung)
- **Klausur** für Studiengänge **Maschinenbau** und **Materialtechnologie**: 2. Juli 2008, 6. Stunde)
- Wechselstromrechnung (4.5 Veranstaltungen, 25. Okt. /01. Nov. /08. Nov. als Block)
- **Klausur** für Studiengang **Facility Management**: 15. Nov. 2008, 2. Stunde

Inhaltsverzeichnis

1 Begriffe, Definitionen und Gesetze....2
1.1 Begriffe und Definitionen....2
1.2 Das Ohm'sche Gesetz....4
1.3 Eingeprägte Quellen (Spannungs- und Stromquellen)....5
1.4 Kirchhoff'sche Gesetze (KMG und KKG)....6
1.5 Parallel- und Reihenschaltung von Widerständen, Spannungs- und Stromteilerregel....8
1.6 Elektrische Energie und Leistung....10
1.7 Das allgemeine Verfahren zur Netzwerkberechnung mit KMG und KKG....12
1.8 Weitere Verfahren zur Netzwerkberechnung....13
1.9 Verfahren des Ersatzwiderstands....15
1.10 Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom....16
1.11 Maschenstromverfahren....16
1.12 Knotenpotenzialverfahren....18
1.13 Zweipolverfahren....20
1.14 Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung....23
1.15 Widerstandsberechnung bei einfachen geometrischen Widerstandsformen....26
2 Elektrische Strömungsfelder (Gleichstromfelder)....27
2.1 Stromdichte S....27
2.2 Strömungsfeld und elektrische Feldstärke E....29
2.3 Elektrisches Feld, elektrisches Potenzial und elektrische Spannung....30
2.4 Widerstandsberechnung mit Hilfe des Strömungsfeldes....30
2.5 Differenzielle Form zur Beschreibung des Strömungsfeldes....32
3 Elektrostatische Felder....34
4 Magnetische Felder....37
5 Netzwerkrechnung für langsam veränderliche Wechselspannungen und Wechselströme....39
5.1 Energieinhalte von Kondensatoren und Induktivitäten....39
5.2 Differenzielle Zusammenhänge zwischen Strömen und Spannungen....40
5.3 Netzwerkberechnung für den allgemeinen Fall, Aufstellen und Lösen der Differenzialgleichungen....40
5.4 Netzwerkberechnung für den eingeschwungenen Fall sinusförmiger Wechselgrößen....43
5.5 Vereinfachung der Netzwerkberechnung mit Hilfe komplexer Zeigergrößen....44
5.6 Rechnen mit komplexen Zeigergrößen....45
5.7 Beispiele zur komplexen Wechselstromrechnung....47
5.8 Scheinleistung, Wirkleistung, Blindleistung, Leistungsfaktor....52

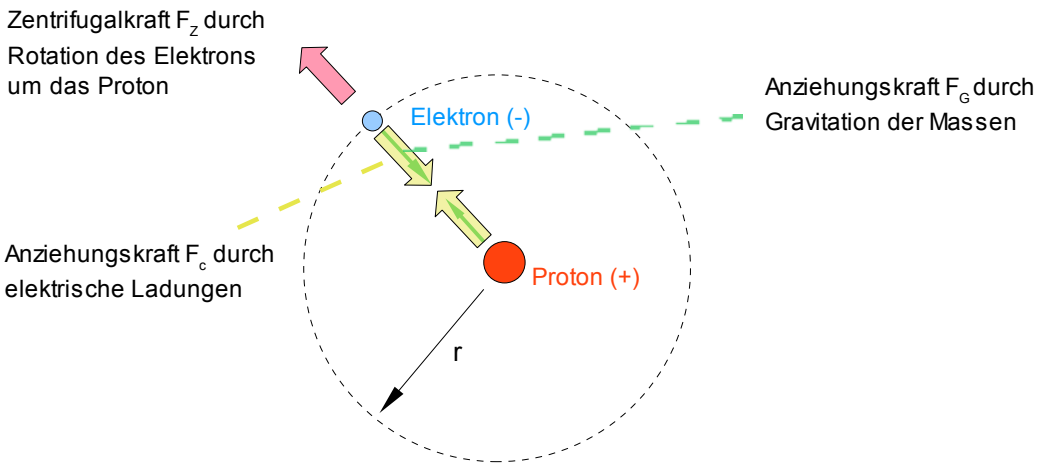
1 Begriffe, Definitionen und Gesetze

1.1 Begriffe und Definitionen

Elektrotechnik ist die Lehre von Erscheinung, Wirkung und Anwendung der Elektrizität.
Elektrizität ist die Summe der Wirkungen ruhender und bewegter elektrischer Ladungen.

Elektrische Ladungen sind beobachtbare und messbare Eigenschaften vieler Elementarteilchen. Es gibt positive und negative elektrische Ladungen. Eine wesentliche Beobachtung ist, dass sich gleiche Ladungen abstoßen, entgegengesetzte Ladungen anziehen. Zwischen Ladungsträgern gibt es eine **Wechselwirkung**, die sich als anziehende oder abstoßende Kraft äußert. Die Gestalt dieser Wechselwirkung ist bis heute nicht geklärt, sie lässt sich aber so beschreiben, dass vollständige Vorhersagen möglich sind.

Eine dieser Vorhersagen ist die Angabe der Kraft F_C zwischen zwei Ladungsträgern, z. B. zwischen Elektron (negative Ladung) und Proton (positive Ladung) im Wasserstoffatom, oder zwischen Gebieten, die mehr als eine Elementarladung enthalten (z. B. Gewitterwolken, positive und negative Bereiche in Batterien oder Akkus, die Anschlussklemmen von Generatoren wie Fahrradynamos und andere)



Der Betrag der – entgegengesetzten - Ladung von Elektron und Proton ist der überhaupt kleinste je festgestellte und wird daher als **Elementarladung e** bezeichnet. Als Einheit ist dieser Elementarladung das **Coulomb = Amperesekunde (C = As]** zugeordnet und weist den Zahlenwert

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\ C$$

auf. (Anmerkung: Möglicherweise haben Quarks als Bausteine der Elektronen und Protonen Ladungen von e/3 und 2e/3, diese treten aber nicht als freie Ladungen auf).

Alle sonst auftretenden Ladungen kann man als **Ladungsgebiete** auffassen, sie sind immer ganzzahlige Vielfache dieser Elementarladung. Die Kraftwirkung zwischen zwei Ladungsgebieten Q_1 und und Q_2 wird durch das Coulombsche Gesetz beschrieben:

$$F_C = -\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \left[\frac{(As)^2}{\frac{As}{Vm}\cdot m^2} = \frac{VAs}{m} = \frac{Nm}{m} = N\right]$$

Diese Schreibweise stellt sicher, dass die anziehende Kraft willkürlich als positiv angenommen ist, wenn die beiden Elementarladungen oder Ladungsgebiete entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Mit r ist der Abstand zwischen den Elementarladungen (s. o.) oder den Mittelpunkten der Ladungsgebiete (s. u.) und mit

$$\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{J \cdot m} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{A\,s}{V\,m}$$

die Dielektrizitätskonstante – auch **elektrische Feldkonstante** - im Vakuum gemeint.

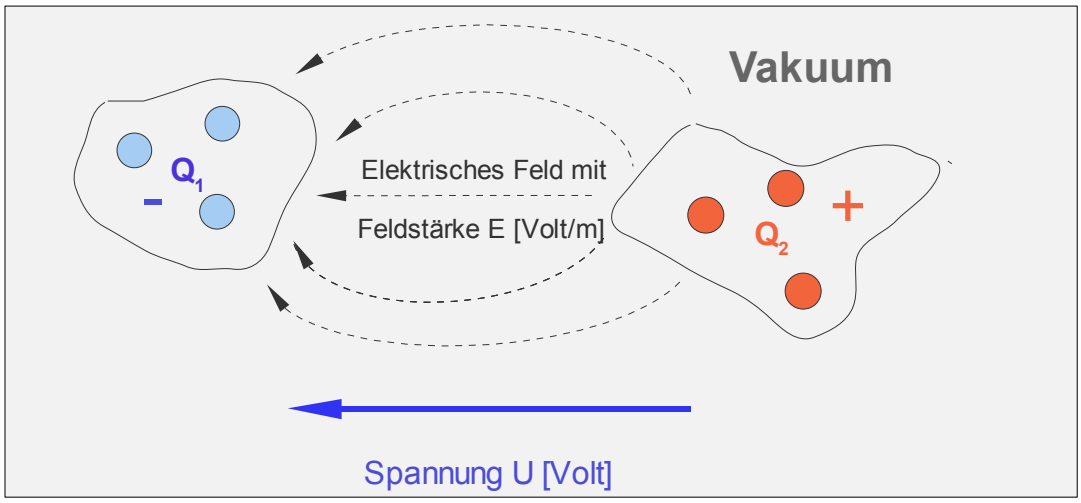
Die elektrische Anziehungskraft zwischen Elektron und Proton im Wasserstoffatom ist mit

$$F_{Cep} = 8{,}19 \cdot 10^{-8} \ \ N$$

unvorstellbar klein. Aber **noch** unvorstellbar kleiner ist die Gravitationskraft durch die Massen:

$$F_{Gep} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 3{,}61 \cdot 10^{-47} \ \ N$$

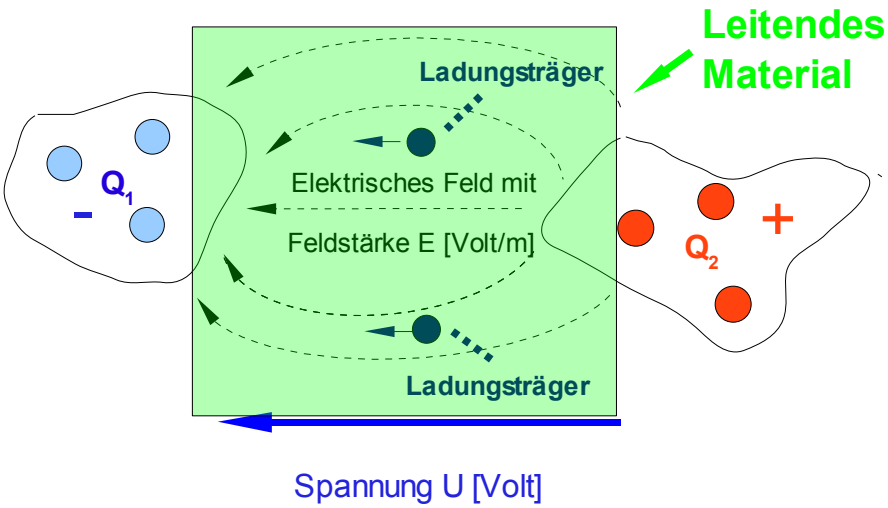
Allerdings hat die Gravitation wegen der riesigen Massen von Galaxien im Universum trotzdem die stärkste Wechselwirkung und damit Fernwirkung.



Die Wechselwirkung stellt man sich in der Form eines elektrischen Feldes vor, welches wie gedachte Linien zwischen den Elementarladungen oder Ladungsgebieten verläuft. Obwohl noch niemand ein solches Feld „gesehen“ hat, gestattet die dazu gehörige mathematische Beschreibung die praktisch lückenlose Erklärung aller mit Ladungen zusammenhängenden Erscheinungen, weshalb man daran festhält. Die Größe des elektrischen Feldes wird als **Feldstärke E** mit der Einheit **Volt/Meter = V/m** angegeben und ist als **vektorielle Größe mit Betrag und Richtung** in jedem Punkt des Raumes definiert.

Durch die unterschiedlichen Ladungen entsteht zwischen den Ladungsgebieten mit dem elektrischen Feld der Stärke E eine elektrische **Spannung U**, die sich messen lässt und die Einheit **V = Volt** besitzt.

Falls sich zwischen den Ladungsgebieten der leere Raum (= Vakuum) befindet, lässt sich als Wirkung nur das elektrische Feld beobachten. Oft befindet sich allerdings nicht der leere Raum, sondern Materie dazwischen. Hierbei gibt es Materialien, die in denen sich Ladungsträger in der Form freier, nicht an Atomkerne gebundener Elektronen bewegen können. Es entsteht ein Strom von Ladungen, den man in der Einheit **A = Ampere** messen kann und der die Ladungsunterschiede in den beiden Gebieten auszugleichen versucht.



Der elektrische Strom ist also die pro Zeiteinheit durch einen tatsächlichen oder gedachten Querschnitt fließende Ladungsmenge:

$$i=\frac{dQ}{dt}\left[\frac{As}{s}=A\right]$$

Je nach Art gestatten Materialien den Ladungsträgern einen unterschiedlich guten „Durchgangsverkehr", beschrieben durch die **elektrische Leitfähigkeit** oder – umgekehrt – durch den **elektrischen Widerstand**. Man teilt sie daher grob in 3 Klassen ein:

- Isolatoren = sehr geringe Leitfähigkeit = hoher Widerstand(Porzellan)
- Halbleiter = geringe bis starke Leitfähigkeit = hoher bis geringer Widerstand, je nach Umgebungsbedinungen (hochreines, dotiertes Silizium *))
- Leiter = gute Leitfähigkeit = geringer Widerstand(Metalle)

*) *Dotieren = gezielter Einbau von Fremdatomen = „Verunreinigen"*

1.2 Das Ohm'sche Gesetz

Zwischen Spannung und Strom besteht eine Abhängigkeit. Abstrakt ausgedrückt ist der Strom eine Funktion der Spannung oder die Spannung eine Funktion des Stromes. Man nennt diese Funktion das **Ohm'sche Gesetz**:

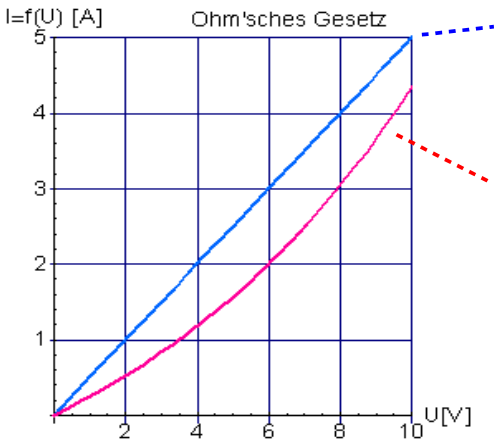
$$I=f(U) \quad \text{oder} \quad U=f^{-1}(I)$$

Diese Funktion f wird bestimmt durch das Material, durch die Umgebungstemperatur und weitere Faktoren. Für viele Materialien, insbesondere für Metalle, gilt bei konstanten Temperaturen, dass f selbst eine lineare Funktion ist. Dann vereinfacht sich das Ohm'sche Gesetz zu seiner bekanntesten Form:

$$I=\frac{1}{R}\cdot U=G\cdot U \quad \text{oder} \quad U=R\cdot I=\frac{1}{G}\cdot I$$

G ist hierbei der Leitwert, gemessen in S = Siemens = Ampere/Volt, **R ist der Widerstand**, gemessen in Ω = Ohm = Volt/Ampere.

Das Ohm'sche Gesetz kann auch als Diagramm dargestellt werden:



$$I=\frac{1}{R}\cdot U=\frac{1}{2}\cdot U$$

$$I=I_0\cdot\left(e^{\ln 2\cdot\frac{U}{U_0}}-1\right)=2\cdot\left(e^{0.69\cdot\frac{U}{6}}-1\right)[A]$$

Der blaue Verlauf kennzeichnet einen konstanten Widerstand: Strom und Spannung sind proportional, die Steigung der Funktion ist umgekehrt proportional zum Widerstand R, bzw. proportional zum Leitwert G. Je steiler die Gerade, desto kleiner der Widerstand, bzw. desto größer der Leitwert.

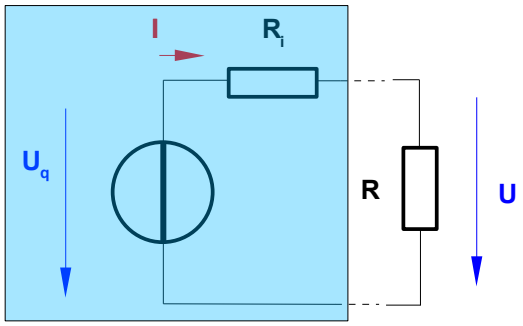
Der rote Verlauf entspricht qualitativ einer Halbleiterfunktion (Diode): Der Strom I ist eine **Exponentialfunktion** (auch e-Funktion genannt) der Spannung U. Die Kennlinie in obigem Beispiel weist aus, dass bei U=0 Volt ein Strom I = 0 Ampere und bei $U = U_0 = 6$ Volt ein Strom von $I = I_0 = 2$ Ampere fliesst.

Es gibt eine Vielzahl weiterer Kennlinienformen, welche die Zusammenhänge zwischen Spannung und Strom an einem Widerstand beschreiben, sogar solche, bei denen sich abschnittsweise trotz Verringerung der Spannung U eine Erhöhung des Stromes I einstellt (= negative Kennlinienbereiche). In vielen, praktisch vorkommenden Aufgabenstellungen liegen aber – wenigstens in guter Näherung - Abhängigkeiten mit konstanten Widerständen vor.

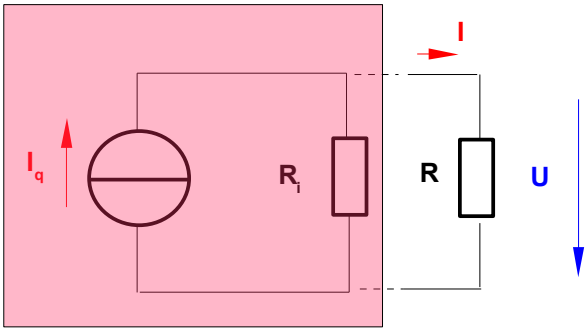
1.3 Eingeprägte Quellen (Spannungs- und Stromquellen)

Gebiete mit unterschiedlichen Ladungen, den **elektrischen Polen**, zwischen denen nach Verbindung mit einem Widerstand Ströme fließen, werden durch Ladungsquellen beschrieben. Man unterscheidet diese als **Spannungsquellen**, wenn der angeschlossene Widerstand eine von seiner Größe möglichst unabhängige Spannung „sehen“ soll, oder als **Stromquellen**, wenn durch den Widerstand ein von seiner Größe möglichst unabhängiger Strom fließen soll. Man bezeichnet solche Quellen auch als **eingeprägte Quellen**. Solche eingeprägten Quellen für konstante Spannungen und Ströme lassen sich innerhalb von Grenzen auf Kosten der zugeführten elektrischen Energie in der Form **geregelter Spannungs- und Stromquellen** künstlich herstellen. Viele der im täglichen Einsatz befindlichen Quellen weisen die gewünschte Unabhängigkeit vom angeschlossenen Widerstand aber nur angenähert auf und oft reicht dies auch vollkommen aus.

Eine **reale Spannungsquelle** stellt man als **Reihenschaltung** einer idealen eingeprägten Spannungsquelle (konstante Spannung U_q) mit einem Widerstand R_i dar (= Innenwiderstand Ri), eine **reale Stromquelle** als **Parallelschaltung** einer idealen eingeprägten Stromquelle (konstanter Strom I_q) und einem Widerstand R_i (ebenfalls Innenwiderstand R_i).



Reale Spannungsquelle



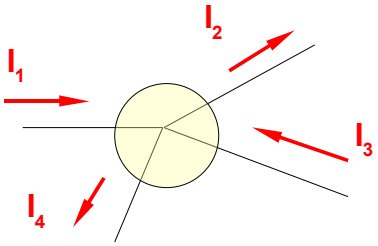
Reale Stromquelle

Sowohl an die reale Spannungsquelle als auch an die reale Stromquelle kann ein Widerstand R angeschlossen werden. An diesem stellt sich über das Ohm'sche Gesetz die Spannung U ein. Die Frage ist zunächst, wie sich die Spannung U_q oder der Strom I_q aufteilen. Hier helfen die **Kirchhoff'sche Gesetze.**

Zusammen mit dem Ohm'schen Gesetz kann man damit bereits einen Großteil elektrotechnischer Grundaufgaben lösen.

1.4 Kirchhoff'sche Gesetze (KMG und KKG)

Das **Kirchhoff'sche Knotengesetz für Ströme (KKG)** besagt, dass die Summe aller in ein geschlossenes Volumengebiet (z. B. eine Kugelfläche) einfließenden Ladungen, in dem sich keine Ladungsspeicher befinden, der Summe aller daraus abfließenden Ladungen entspricht (oder: Die Summe aller Ströme ist Null).

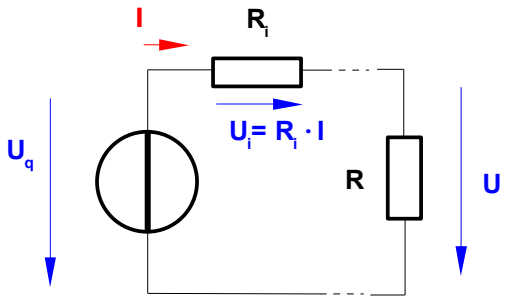


$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

Technisch kann es sich bei dem Volumengebiet z. B. um einen Lötpunkt oder eine Lüsterklemme handeln. Als (willkürliche) Vorzeichenregel wird vereinbart:

- Zufließende Ströme positiv
- Abfließende Ströme negativ.
- Bei Spannungsquellen fließen Ströme von den Pluspolen weg (diese sind Knoten in der einfachsten Form).
- Ist die physikalische Flussrichtung eines Stromes nicht unmittelbar erkennbar (kommt häufig vor), wird sie willkürlich angenommen. Das richtige Vorzeichen ergibt sich dann von selbst aus der (richtigen) Rechnung.

Das **Kirchhoff'sche Maschengesetz für Spannungen (KMG)** besagt, dass die Summe aller in einem **geschlossenen Umlauf** auftretenden Spannungen eines Netzwerks Null ist.

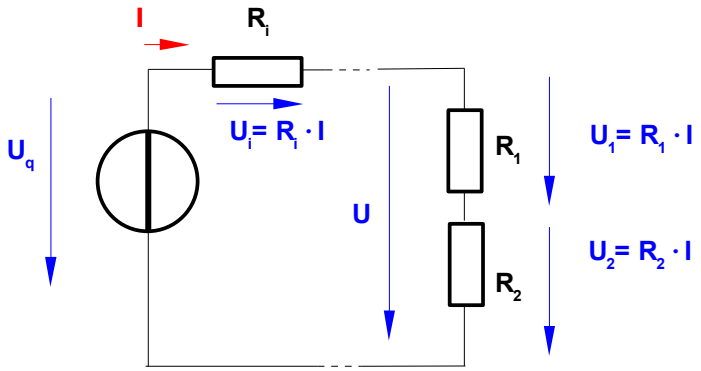


$$U_q - U_i - U = 0$$

Als Vorzeichenregel wird vereinbart:

- Die Richtungen der Spannungspfeile **eingeprägter** Quellen sind vorgegeben.
- Die Richtung der Spannungspfeile an Widerständen entspricht der Richtung der Ströme.
- Ströme fließen vom Pluspol einer Spannungsquelle weg (Erzeugerzählpfeilsystem).
- Wenn die Stromflussrichtung aus der Schaltungsanordnung nicht unmittelbar ersichtlich ist, wird sie willkürlich angenommen. Die physikalisch Richtung ergibt sich aus dem Vorzeichen der (richtigen) Rechnung.

Das Maschengesetz gilt nicht nur für „physische“ Maschen, bei denen ein voller Umlauf über eine geschlossene Kette physikalischer Elemente geht, wie im folgend dargestellten Kreis mit der Spannungsquelle und den Widerständen R_i, R_1 und R_2, sondern auch für **jede** „logische“ Masche über einen **vollen Umlauf**.



$$U_q - U_i - U_1 - U_2 = 0$$

$$U_q - U_i - U = 0$$

$$U - U_1 - U_2 = 0$$

Hier kann noch die Frage beantwortet werden, welche **Normale** für die Einheiten von Spannungen, Strömen und Widerständen verwendbar sind, damit sie möglichst überall im Universum vergleichbar werden. Für Widerstände nutzt man dafür seit ca. 1990 den **Klitzing-Effekt**, für Spannungen den **Josephson-Effekt**. Beide führen die Größen Ohm und Volt auf Elementarkonstanten zurück, die sich in den Eichinstituten mit sehr hoher Genauigkeit und Konstanz darstellen lassen. Die Einheit Ampere ergibt sich daraus über das Ohm'sche Gesetz.

Das Widerstandsnormal wird über die Klitzing-Konstante R_K als Quotienten aus dem Planck'schen Wirkungsquantum h und dem Quadrat der Elementarladung e definiert:

$$R_K = \frac{h}{e^2} = \frac{6.6261 \cdot 10^{-34}\,V \cdot A \cdot s^2}{(1.602 \cdot 10^{-19}\,A \cdot s)^2} = 25812.807\,Ohm \quad .$$

Das Spannungsnormal lässt sich mit Hilfe einer - höchstgenau möglichen - Frequenzmessung aus

$$V_n = n \cdot \Phi_0 \cdot f\,[Volt] \quad \text{mit} \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

bestimmen. Dabei hat der Kehrwert des magnetischen Flussquantums (eine Naturkonstante)

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e}\,[Vs] \quad \text{als Josephson-Konstante den Betrag} \quad K_{J90} = \frac{1}{\Phi_0} = 483597.9\left[\frac{GHz}{V}\right] \quad .$$

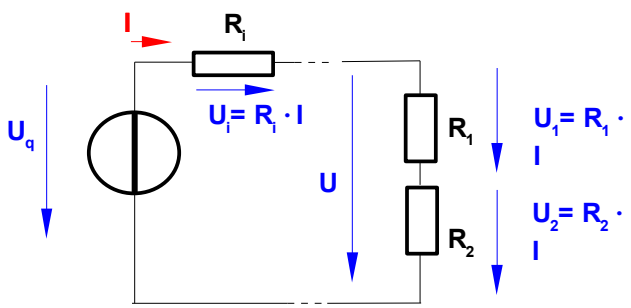
Z. B. stellt das Kalibirierlabor des TÜV Thüringen über diese Beziehung mit Frequenzen um 75 GHz und deren Vielfachen Spannungsnormale in Schritten von 155 Mikrovolt bei einer Unsicherheit von $2 \cdot 10^{-7}$ dar.

Einfache Anwendungen des Ohm'schen Gesetzes und der Kirchhoff'schen Gesetze sind

- Berechnung des Gesamtwiderstandes einer Reihenschaltung von Widerständen
- Spannungsteilerregel
- Berechnung des Gesamtwiderstandes einer Parallelschaltung von Widerständen
- Stromteilerregel

1.5 Parallel- und Reihenschaltung von Widerständen, Spannungs- und Stromteilerregel

Reihenschaltung von Widerständen:



$$U_q - R_i \cdot I - R_1 \cdot I - R_2 \cdot I = 0$$

$$U_q = (R_i + R_1 + R_2) \cdot I$$

$$U_q = R_g \cdot I$$

$$R_g = R_i + R_1 + R_2$$

Der Gesamtwiderstand ist die demnach Summe der Einzelwiderstände. Allgemein gilt für n Widerstände:

$$R_g = \sum_{i=1}^{i=n} R_i \quad .$$

Daraus lässt sich die **Spannungsteilerregel** für Reihenschaltungen ableiten.

$$U_1 = R_1 \cdot I$$

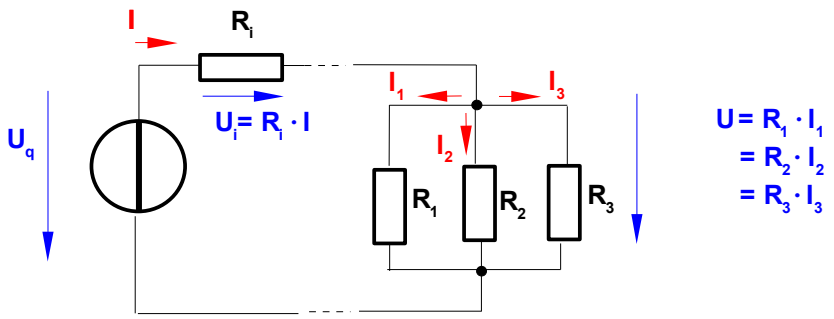
$$I = \frac{U_q}{R_g} = \frac{U_q}{R_i + R_1 + R_2}$$

$$U_1 = \frac{R_1}{R_i + R_1 + R_2} \cdot U_q$$

$$\frac{U_1}{U_q} = \frac{R_1}{R_i + R_1 + R_2}$$

Spannungen verhalten sich in einer Reihenschaltung also wie die zugeordneten Widerstände.

Paralellschaltung von Widerständen:



Hier gilt mit dem Knotengesetz:

$$I - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \cdot U = \frac{U}{R_g}$$

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \text{oder} \quad G_g = G_1 + G_2 + G_3$$

Der Kehrwert des Gesamtwiderstandes ist also gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelwiderstände. Allgemein gilt für n parallel geschaltete Widerstände:

$$\frac{1}{R_g} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{R_i} \quad \text{oder mit den Leitwerten} \quad G = \frac{1}{R} \quad \rightarrow \quad G_g = \sum_{i=1}^{i=n} G_i \quad .$$

Häufig gebraucht wird der Fall von 2 parallel geschalteten Widerständen:

$$R_g = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Daraus lässt sich die **Stromteilerregel** ableiten:

$$U = R_g \cdot I = R_1 \cdot I_1 = \frac{I}{G_g} = \frac{I_1}{G_1}$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_g}{R_1} = \frac{1}{\left[\frac{R_1}{\frac{1}{R_g}}\right]} = \frac{1}{\frac{R_1}{\left[\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\right]}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{oder} \quad \frac{I_1}{I} = \frac{G_1}{G_g}$$

Bei n parallelen Widerständen ist der Strom I_i durch den Widerstand R_i bzw. den Leitwert G_i über

$$I_i = \frac{G_i}{G_1 + G_2 + \ \ldots \ G_n} \cdot I$$

gegeben. Ströme verhalten sich bei Parallelschaltungen also wie die den Strömen zugeordneten Leitwerte.

1.6 Elektrische Energie und Leistung

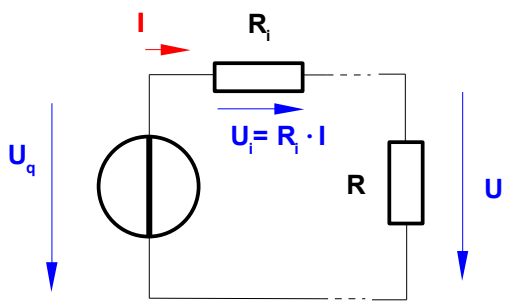
Die **elektrische Leistung P** wird aus dem Produkt von Spannung und Strom berechnet und in Watt angegeben:

$$P = U \cdot I \quad [V \cdot A = \text{Watt}]$$

Die **elektrische Energie E_e** ist das Integral aus dem Produkt der elektrischen Leistung über der Zeit in den Einheiten Wattsekunden, Joule oder Newtonmeter. Es gilt:

$$E_e = \int_{t=t_1}^{t_2} U \cdot I \, dt \quad [\text{VAs} = \text{Joule} = \text{Nm}]$$

Für ein elektrisches Netzwerk stellt sich oft die Frage, welche maximale Leistung den Klemmen an irgendwelchen Punkten entnommen werden kann. Der einfachste Fall ist wieder der aus einer realen Quelle und einem Verbraucher R bestehende Kreis:



Die von R verbrauchte Leistung beträgt P = U · I [Watt] und ensteht hier als Wärme. Die Spannung kann mit der Spannungsteilerregel, der Strom über das Ohm'sche Gesetz mit Hilfe der Reihenschaltung von R_i und R ausgedrückt werden:

$$U=\frac{R}{R_i+R}\cdot U_q \quad , \quad I=\frac{U_q}{R_i+R} \quad \rightarrow \quad P=U\cdot I=\frac{R}{(R_i+R)^2}\cdot U_q^2$$

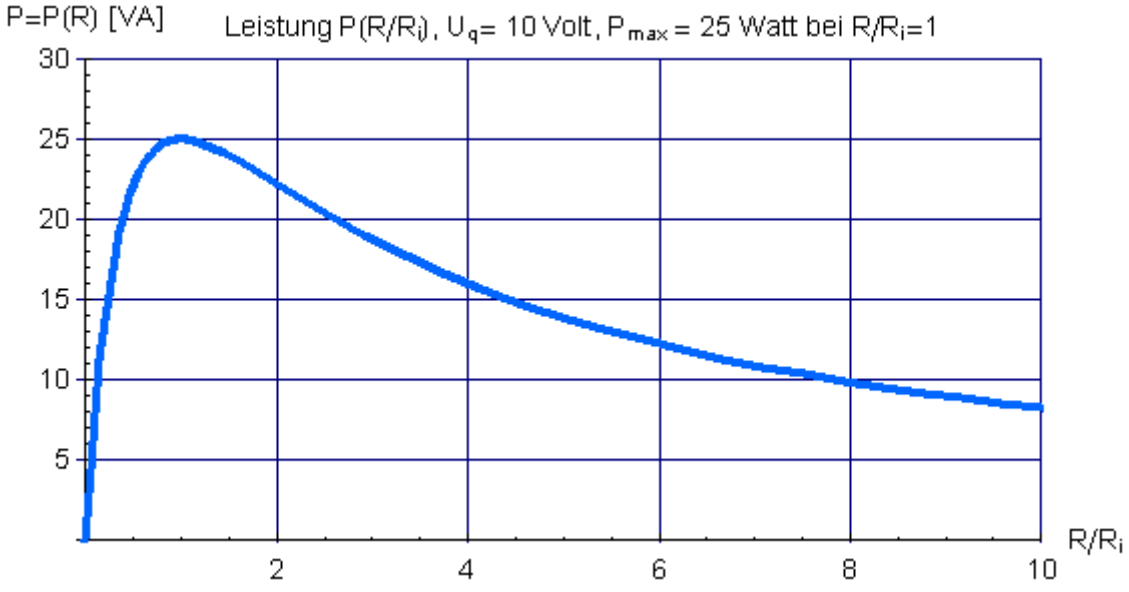
Wenn U_q und R_i konstant sind, kann man zunächst die beiden Grenzfälle R = 0 und R → ∞ betrachten. Es ist P(R=0) =0 und P(R → ∞) = 0. Da die entnehmbare Leistung im Allgemeinen größer als 0 und mit R stetig sein muss, gibt es einen positiven Maximalwert P_{max} . Für diesen gilt nach den Regeln der Mathematik, dass die Ableitung von P nach dR dann Null ist:

$$\frac{dP}{dR}=P'=0=\frac{(R+R_i)^2-2\cdot(R+R_i)\cdot R}{\left((R+R_i)^2\right)^2}\cdot U_q^2$$

Eine gebrochen rationale Funktion nimmt den Wert 0 an, wenn der Zähler Null ist (und nicht zugleich der Nenner Null wird, was hier wegen R_i nicht passieren kann):

$$(R+R_i)^2-2\cdot(R+R_i)\cdot R=0 \quad \rightarrow \quad (R+R_i)-2\cdot R=0 \quad \rightarrow \quad R=R_i \quad .$$

Man erhält also das einfache Ergebnis, dass die maximale Leistung aus einer realen Quelle dann entnommen werden kann, wenn der Verbraucherwiderstand genauso groß wie der Innenwiderstand gewählt wird. Das Leistungsdiagramm über R/R_i hat folgenden Verlauf:



Für die **Starkstromtechnik** ist die Wahl R = R_i äußerst ungünstig, da im Leistungserzeuger an R_i die gleiche Leistung (in Wärme) umgesetzt wird wie im Verbraucher. Bei Leistungen von einigen 100 Megawatt ist dies völlig unakzeptabel und man muss den Innenwiderstand R_i sehr klein gegen die Summe der Verbraucherwiderstände halten.

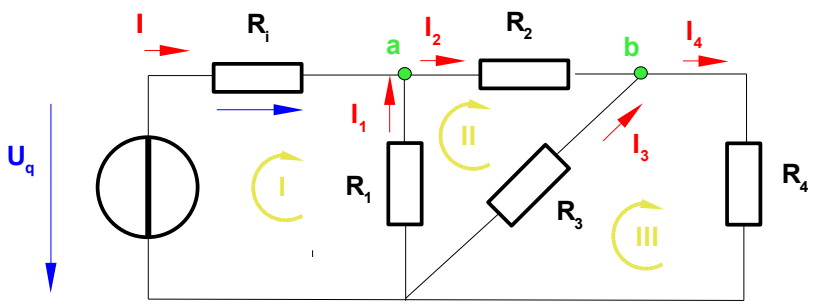
Anders sieht es im **Kleinstleistungsbereich** der Nachrichtentechnik aus. Hier kommt es darauf an, möglichst die gesamte verfügbare Leistung aus einer Antenne an den Verstärkereingang zu bringen. Dies gelingt nur mit Leistungsanpassung, also R = R_i . Die in der Quelle entstehenden Verluste fallen wegen der geringen Leistungen nicht ins Gewicht.

1.7 Das allgemeine Verfahren zur Netzwerkberechnung mit KMG und KKG

Mit den beiden Kirchhoff'schen Gesetzen und dem Ohm'schen Gesetz lassen sich die Ströme und Spannungen in einem Netzwerk aus Widerständen und Gleichspannungs- und/oder Gleichstromquellen immer berechnen. Die Sicherheit dieses Weges wird allerdings häufig durch den Verzicht auf daraus abgeleitete einfachere Verfahren erkauft, die zu einer schnelleren Lösung führen können – aber leider nicht immer anwendbar sind.

Ein Beispiel für ein kleines Netzwerk, bei dem zu den 5 gegebenen Widerständen R_i , R_1, ..., R_4 und der eingeprägte Spannung U_q die 5 unbekannten Ströme I, I_1, ..., I_4 zu berechnen sind.

Die Richtung der Spannung U_q ist dabei vorgegeben, damit liegt - **bei nur einer Quelle** - auch die Richtung von I fest. Die physikalischen Richtungen der übrigen Ströme sind nicht unmittelbar ersichtlich und werden willkürlich eingetragen (damit sind auch alle anderen Kombinationen zulässig).



Vorüberlegung: Für die Berechnung der 5 unbekannten Ströme benötigt man 5 unabhängige Gleichungen. Dafür lassen sich 3 unabhängige Maschen I, II und III (Zählrichtungen sind willkürlich) sowie 2 unabhängige Knoten a und b bilden. Die 5 Gleichungen sind:

Aus KKG für a:	$I+I_1-I_2=0$	(1)
Aus KKG für b:	$I_2+I_3-I_4=0$	(2)
Aus KMG für I:	$-U_q+R_i\cdot I-R_1\cdot I_1=0$	(3)
Aus KMG für II:	$R_1\cdot I_1+R_2\cdot I_2-R_3\cdot I_3=0$	(4)
Aus KMG für III:	$R_3\cdot I_3+R_4\cdot I_4=0$	(5)

Damit ist der elektrotechnische Teil der Aufgabe vollständig formuliert, alles weitere besteht in der mathematischen Lösung des linearen Gleichungssystems (1) bis (5). Dafür gibt es verschiedene Wege. Einer ist unter der Bezeichnung „**Gauss'sches Eliminationsverfahren**“ bekannt. Zur besseren Übersicht werden dazu die 5 Gleichungen so dargestellt, dass auf der linken Seite alle unbekannten Größen (die Ströme), auf der rechten Seite alle bekannten Größen (hier nur die Spannung U_q) stehen:

$$
\begin{array}{lllllll}
I+ & I_1- & I_2 & & & =0 & (1)\\
 & & I_2+ & I_3 & -I_4 & =0 & (2)\\
R_i\cdot I-R_1\cdot I_1 & & & & & =U_q & (3)\\
 & R_1\cdot I_1+R_2\cdot I_2-R_3\cdot I_3 & & & & =0 & (4)\\
 & & & R_3\cdot I_3+R_4\cdot I_4 & & =0 & (5)
\end{array}
$$

Da Zeile 1 den Strom I enthält, werden in allen Folgezeilen, in denen ebenfalls der Strom I vorkommt, diese Terme beseitigt, in dem man die erste Zeile mit einem geeigneten Faktor multipliziert und zu der jeweiligen Folgezeile addiert. Hier enthält nur Zeile 3 den Strom I. Der geeignete Faktor ist (– R_i). Zeile (1) wird hiermit

multipliziert und das Ergebnis zu Zeile (3) addiert. Nach den Regeln der **linearen Algebra** ändert das nichts am Inhalt des Gleichungssystems, die alte Zeile (3) ändert sich dadurch in Zeile (3*):

$$\begin{array}{lllllll}
I+ & I_1- & I_2 & & & =0 & (1)\\
 & & I_2+ & I_3 & -I_4 & =0 & (2)\\
(-R_1-R_i)\cdot I_1+ & R_i\cdot I_2 & & & & =U_q & (3^*)\\
R_1\cdot I_1 & +R_2\cdot I_2- & R_3\cdot I_3 & & & =0 & (4)\\
 & & R_3\cdot I_3 & +R_4\cdot I_4 & & =0 & (5)
\end{array}$$

Da Zeile (2) weder I noch I_1 enthält, wird sie an die vorletzte Position verschoben:

$$\begin{array}{lllllll}
I+ & I_1- & I_2 & & & =0 & (1)\\
(-R_1-R_i)\cdot I_1+ & R_i\cdot I_2 & & & & =U_q & (3^*)\\
R_1\cdot I_1 & +R_2\cdot I_2- & R_3\cdot I_3 & & & =0 & (4)\\
 & & I_2+ & I_3 & -I_4 & =0 & (2)\\
 & & R_3\cdot I_3 & +R_4\cdot I_4 & & =0 & (5)
\end{array}$$

Um den Term mit I_1 aus Zeile (4) zu entfernen, muss als nächstes Zeile (3*) mit $-R_1/(-R_1 - R_i)$ multipliziert und das Ergebnis zu Zeile (4) addiert werden. Das ergibt die neue Zeile (4*):

$$\begin{array}{lllllll}
I+ & I_1- & I_2 & & & = 0 & (1)\\
(-R_1-R_i)\cdot I_1+ & R_i\cdot I_2 & & & & = U_q & (3^*)\\
 & \left[R_2+\frac{R_1\cdot R_i}{R_1+R_i}\right]\cdot I_2- & R_3\cdot I_3 & & & = \frac{R_1}{R_1+R_i}\cdot U_q & (4^*)\\
 & I_2+ & I_3 & -I_4 & & = 0 & (2)\\
 & & R_3\cdot I_3 & +R_4\cdot I_4 & & = 0 & (5)
\end{array}$$

Nun wird (4*) mit

$$-\frac{1}{R_2+\frac{R_1\cdot R_i}{R_1+R_i}}=-\frac{R_1+R_i}{R_1\cdot R_2+R_2\cdot R_i+R_1\cdot R_i}$$

multipliziert und zu (2) addiert, damit I_2 aus (2) verschwindet usw.

Als letzte Aktion entsteht auf diese Weise in der letzten Zeile eine Gleichung ausschließlich für I_4, woraus dieser Strom berechnet werden kann. Eingesetzt in die vorletzte Gleichung erhält man I_3 und so fort. Das Verfahren erzeugt auf der linken Seite also schrittweise eine **rechte obere Dreiecksform** für die Unbekannten, welche rückwärts die Auflösung gestattet.

1.8 Weitere Verfahren zur Netzwerkberechnung

Wie man sieht, wird die Lösung von Hand auf diesem Weg bereits für das kleine Netzwerk sehr aufwändig und damit auch fehleranfällig.

Das Hauptziel für Handrechnungen muss also darin bestehen, Lösungsansätze zu finden, die eine möglichst geringe Anzahl von Unbekannten bzw. Gleichungen enthält, im Idealfall nur eine, was aber nicht immer gelingt.

Der oben beschriebene, allgemein anwendbare Lösungsweg ist allerdings der eleganteste und sehr gut programmierbar. Zur Lösung mit einem der vielen Mathematikpakete – hier als Beispiel ***Mathematica*** – gibt es sehr kompakte Funktionen wie z. B. *Simplify* und *Solve:*

```
Simplify[ ( die Funktion Simplify vereinfacht automatisch das Endergebnis )

Solve[ ( die Funktion Solve löst ein beliebig großes Gleichungssystem )
 ( hier folgen die 5 Gleichungen: )
{ I0 + I1 - I2 == 0,
I2 + I3 - I4 == 0,
-Uq + Ri*I0 - R1*I1 == 0,
R1*I1 + R2*I2 - R3*I3 == 0,
R3*I3 + R4 * I4 == 0},
( hier stehen die Namen der 5 unbekannten Ströme: )
{I0, I1, I2, I3, I4}
] ]
```

Als Ergebnis wird die Lösung

$$I_0 \to \frac{(R_3 R_4+R_1 (R_3+R_4)+R_2 (R_3+R_4)) U_q}{(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) R_i+R_1 (R_2 (R_3+R_4)+R_4 R_i+R_3 (R_4+R_i))}$$

$$I_1 \to -\frac{(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) U_q}{(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) R_i+R_1 (R_2 (R_3+R_4)+R_4 R_i+R_3 (R_4+R_i))}$$

$$I_2 \to \frac{R_1 (R_3+R_4) U_q}{(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) R_i+R_1 (R_2 (R_3+R_4)+R_4 R_i+R_3 (R_4+R_i))}$$

$$I_3 \to -\frac{R_1 R_4 U_q}{(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) R_i+R_1 (R_2 (R_3+R_4)+R_4 R_i+R_3 (R_4+R_i))}$$

$$I_4 \to \frac{R_1 R_3 U_q}{(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) R_i+R_1 (R_2 (R_3+R_4)+R_4 R_i+R_3 (R_4+R_i))}$$

geliefert (I_0 steht hier für den Strom I). Diese allgemeine algebraische Form ist besonders aufwändig, gestattet aber auch die weitreichendsden analytischen Untersuchungen, z. B. bei der Frage, wie sich Veränderungen eines speziellen Widerstandes auf die Ströme auswirken. Ist man nur an Zahlenwerten interessiert, sieht die Lösung bereits wesentlich einfacher aus (ist aber nicht unbedingt weniger aufwändig zu erreichen). So ergibt die Kombination

U_q	= 100 V
R_i	= 10 Ohm
$R_1, \ldots R_4$	= 100 Ohm

die Ströme (in Ampere)

$$I_0 \to \frac{10}{7} \qquad I_1 \to -\frac{6}{7} \qquad I_2 \to \frac{4}{7} \qquad I_3 \to -\frac{2}{7} \qquad I_4 \to \frac{2}{7}\ .$$

An den Vorzeichen sieht man im Übrigen, dass die Ströme I_1 und I_3 falsch gerichtet angenommen wurden.

Es stehen einige weitere Lösungsverfahren zur Verfügung, die im Einzelfall mit bedeutend geringerem Aufwand auskommen. Leider kann man keine „todsicheren“ allgemeinen Regeln dafür aufstellen, wann sie angewendet werden sollten. Immer läuft es aber darauf hinaus, die Anzahl der in **einem** Schritt zu bestimmenden Unbekannten möglichst klein zu halten, um den Aufwand bei der **Simultanlösung** von **Gleichungssystemen** zu verringern.

1.9 Verfahren des Ersatzwiderstands

Im vorliegenden Beispiel lässt sich zunächst der Strom I allein bestimmen. Dazu muss das an der realen Spannungsquelle liegende Netzwerk zu einem einzigen Widerstand zusammengefasst werden (**Verfahren des Ersatzwiderstandes**).

Man beginnt mit der Parallelschaltung von R_3 und R_4:

$$R_5=\frac{R_3\cdot R_4}{R_3+R_4}$$

R_5 liegt in Reihe mit R_2:

$$R_6=R_2+R_5=R_2+\frac{R_3\cdot R_4}{R_3+R_4}=\frac{R_2\cdot R_3+R_2\cdot R_4+R_3\cdot R_4}{R_3+R_4}$$

R_6 wiederum liegt parallel zu R_1:

$$R_7=\frac{R_1\cdot R_6}{R_1+R_6}=\frac{R_1\cdot\frac{R_2\cdot R_3+R_2\cdot R_4+R_3\cdot R_4}{R_3+R_4}}{R_1+\frac{R_2\cdot R_3+R_2\cdot R_4+R_3\cdot R_4}{R_3+R_4}}=\frac{R_1\cdot(R_2\cdot R_3+R_2\cdot R_4+R_3\cdot R_4)}{R_1\cdot R_3+R_1\cdot R_4+R_2\cdot R_3+R_2\cdot R_4+R_3\cdot R_4}$$

Nun kann man den Strom I berechnen:

$$I=\frac{1}{R_i+R_7}\cdot U_q \quad .$$

Um an dieser Stelle immer längere „Bandwurmausdrücke“ zu vermeiden, kann man die oben angenommenen Widerstands- und Spannungswerte einsetzen. Man erhält

$$I=\frac{1}{R_i+R_7}\cdot U_q=\frac{1}{10+\frac{3}{5}\cdot 10^2}\cdot 100\left[\frac{\text{Volt}}{\text{Ohm}}\right]=\frac{50}{350}\cdot 100\ [A]=\frac{10}{7}\ [A] \quad .$$

Die Bestimmung von I war also bedeutend weniger aufwändig, allerdings müssen nun noch die restlichen 4 Ströme ermittelt werden. Über die Stromteilerregel (s. o) lässt sich I_1 berechnen:

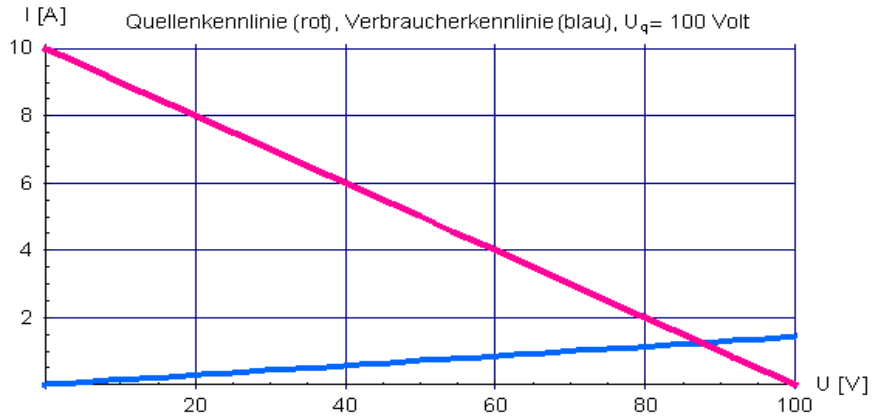
$$I_1=\frac{-\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_6}}\cdot I=-\frac{R_6}{R_1+R_6}\cdot I=-\frac{\frac{3}{2}\cdot 10^2}{100+\frac{3}{2}\cdot 10^2}\cdot\frac{10}{7}\ [A]=-\frac{6}{7}\ [A] \quad .$$

Am Knoten (a) gilt $I + I_1 - I_2 = 0$. Daraus wird $I_2 = 4/7$ [A]. Mit I_2 kann am Knoten (b) - wiederum über die Stromteilerregel – schließlich I_3 und I_4 ermittelt werden.

1.10 Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom

Vor der Betrachtung weiterer Verfahren wird noch der bereits erwähnte grafische Lösungsweg versucht. Auch hierfür ist zunächst die Berechnung des Verbraucherwiderstands R_7 erforderlich, den man als „Kennlinie“ in ein Strom/Spannungsdiagramm einträgt. Außerdem benötigt man die **Quellenkennlinie** der realen Spannungsquelle mit ihrem Innenwiderstand R_i = 10 Ohm. Sie weist dann eine **Leerlaufspannung** von U_q = 100 Volt und einen **Kurzschlussstrom** von I_k = 10 A auf.

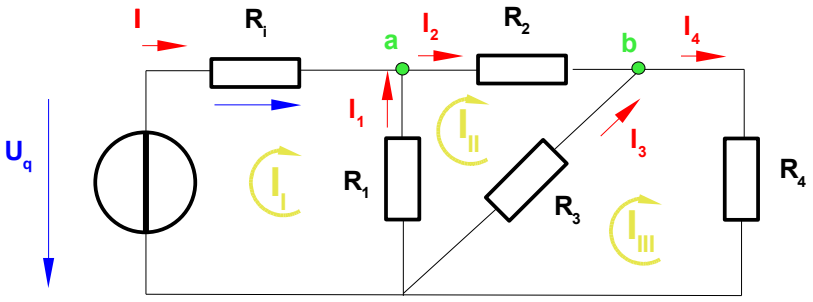
Da bei Anschluss eines Verbrauchers sowohl der Strom I als auch die Spannung U an den Klemmen gleich sein muss, lassen sich beide Größen am Schnittpunkt von Verbraucher- und Quellen-Kennlinie ablesen. Zuerst muss auch hier der Verbraucherwiderstand berechnet werden, daher bringt das Verfahren über die Anschaulichkeit hinaus keinen Vorteil gegenüber dem vorher beschrittenen rechnerischen Weg zur Ermittlung von I. Allerdings ist er auch für nichtlineare Verbraucherkennlinien einfach anwendbar, wo die rechnerische Lösung sehr aufwändig werden kann (Einsatz numerischer Methoden).



Der Schnittpunkt beider Kennlinien liegt bei I = 10/7 A = 1.43 A, das Ergebnis stimmt mit dem berechneten Wert überein. Im Übrigen ist an der roten Quellenkennlinie zu erkennen, dass ihre Steigung $-1/R_i$ beträgt, die blaue Verbraucherkennlinie hat die Steigung $1/R_7$ = 1/60 Ohm.

1.11 Maschenstromverfahren

Beim Maschenstromverfahren beschränkt sich die Zahl der Gleichungen und Unbekannten zunächst auf die Anzahl der m unabhängigen Maschen. Für jede Masche wird ein künstlicher Strom I_I, I_{II}, ... definiert und hierzu ein System mit m Gleichungen für die m unbekannten Maschenströme aufgestellt. Der Vorteil liegt darin, dass statt der m-Maschen und k-Knoten-Gleichungen für die n = m + k unbekannten Zweigströme nur m Unbekannte simultan zu lösen sind. Allerdings müssen die Zweigströme anschließend noch aus den Maschenströmen berechnet werden, so dass das „Geschenk“ nicht grenzenlos ist. Enthält das Netzwerk Stromquellen, dann können die von diesen gelieferten eingeprägten Ströme als bereits bekannte Maschenströme berücksichtigt werden, während die zugehörige Maschenstromgleichung aber nicht aufgestellt werden muss. Ein Beispiel folgt später.



Im vorliegenden Beispiel gibt es 3 unabhängige Maschen und damit die 3 Maschenströme I_I, I_{II} und I_{III}. Die 3 Maschengleichungen sind:

Masche I: $-U_q+R_i\cdot I_I+R1\cdot I_I-R_1\cdot I_{II}=0$

Masche II: $-R_1\cdot I_I+R_1\cdot I_{II}+R_2\cdot I_{II}+R_3\cdot I_{II}-R_3\cdot I_{III}=0$

Masche III: $-R_3\cdot I_{II}+R_3\cdot I_{III}+R_4\cdot I_{III}=0$

Als Lösung gibt das Mathematikprogramm

$$I_I \to \frac{(R_3 R_4+R_1 (R_3+R_4)+R_2 (R_3+R_4)) U_q}{R_1^2 (R_3+R_4)+(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) R_i+R_1 (R_4 R_i+R_3 (R_4+R_i))}$$

$$I_{II} \to -\frac{R_1 (R_3+R_4) U_q}{R_3^2 (R_1+R_i)-(R_3+R_4) (R_1^2+(R_2+R_3) R_i+R_1 (R_3+R_i))}$$

$$I_{III} \to -\frac{R_1 R_3 U_q}{R_3^2 (R_1+R_i)-(R_3+R_4) (R_1^2+(R_2+R_3) R_i+R_1 (R_3+R_i))}$$

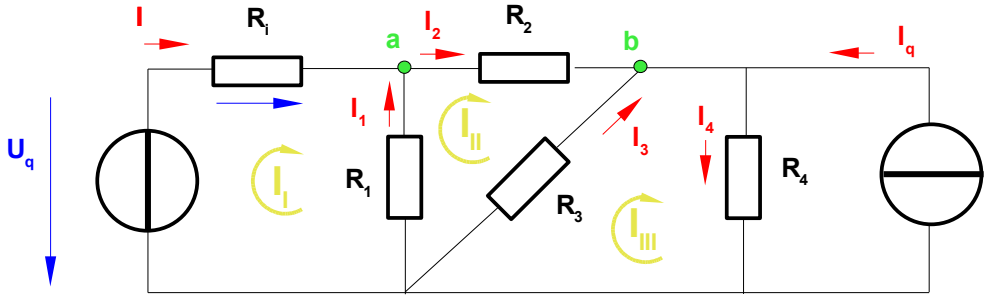
aus. Mit den zuvor angenommenen Zahlenwerten (in Ampere):

$$I_I \to \frac{10}{7} \qquad I_{II} \to \frac{4}{7} \qquad I_{III} \to \frac{2}{7}\ .$$

Hierbei ist $I = I_I$, $I_2 = I_{II}$ und $I_4 = I_{III}$, da die Maschenströme in den Zweigen, die nicht in einer weiteren Masche liegen, mit den Zweigströmen identisch sind. Die Werte für I_1 und I_3 lassen sich aus den beiden Knotengleichungen berechnen:

$$I_1=-I+I_2=-\frac{6}{7}A \quad \text{und} \quad I_3=-I_2+I_4=-\frac{2}{7}A\ .$$

Im allgemeinen können bei Anwendung des Maschenstromverfahrens so viele Gleichungen eingespart werden, wie es unabhängige Knoten gibt. Sind Stromquellen im Netzwerk vorhanden, ändert sich das Vorgehen nicht, wie das folgende Beispiel mit dem eingeprägten Strom I_q zeigt.



Die Maschen I und II werden behandelt wie zuvor, bei Masche II kommt über R_4 der – vorgegebene - Maschenstrom I_q hinzu (er ist keine Unbekannte!):

Masche I: $-U_q+R_i\cdot I_I+R1\cdot I_I-R_1\cdot I_{II}=0$

Masche II: $-R_1\cdot I_I+R_1\cdot I_{II}+R_2\cdot I_{II}+R_3\cdot I_{II}-R_3\cdot I_{III}=0$

Masche III: $-R_3\cdot I_{II}+R_3\cdot I_{III}+R_4\cdot I_{III}+R_3\cdot I_q=0$

Für die rechte Masche aus R_4 und Stromquelle muss keine Gleichung aufgestellt werden, da I_q keine unbekannte Größe darstellt. Ergebnis:

$$I_I \to \frac{(R_3 R_4+R_1 (R_3+R_4)) U_q+R_2 (R_4 U_q+R_3 (-I_q R_4+U_q))}{R_1^2 (R_3+R_4)+(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) R_i+R_1 (R_4 R_i+R_3 (R_4+R_i))}$$

$$I_{II} \to \frac{-I_q R_3 R_4 R_i+R_1 (R_4 U_q+R_3 (-I_q R_4+U_q))}{R_1^2 (R_3+R_4)+(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4)) R_i+R_1 (R_4 R_i+R_3 (R_4+R_i))}$$

$$I_{III} \to -\frac{-I_q R_4 (R_1^2+(R_2+R_3) R_i+R_1 (R_3+R_i))+R_1 R_3 U_q}{R_3^2 (R_1+R_i)-(R_3+R_4) (R_1^2+(R_2+R_3) R_i+R_1 (R_3+R_i))}$$

Mit den bereits verwendeten Zahlenwerten und dem zusätzlichen eingeprägten Strom I_q = 10 A werden die Maschenströme in Ampere:

$$I_I \to -\frac{10}{7} \quad I_{II} \to -\frac{18}{7} \quad I_{III} \to -\frac{44}{7} \; .$$

Daraus lassen sich wieder die Zweigströme berechnen.

$$I = I_I$$

$$I_1 = I_{II} - I_I$$

$$I_2 = I_{II}$$

$$I_3 = I_{III} - I_{II}$$

$$I_4 = I_{III} + I_q \; .$$

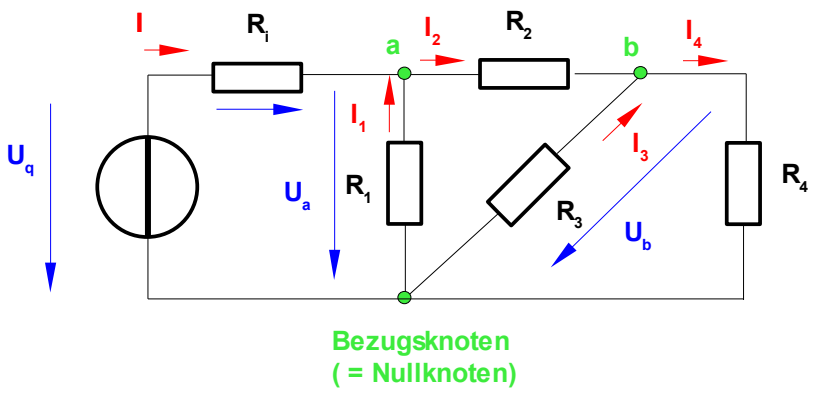
Mit dem KMG-KKG-Verfahren erhält man auf ganz anderem Weg die Ströme (in Ampere)

$$I_0 \to -\frac{10}{7} \quad I_1 \to -\frac{8}{7} \quad I_2 \to -\frac{18}{7} \quad I_3 \to -\frac{26}{7} \quad I_4 \to \frac{26}{7} \; ,$$

was mit dem über die obigen Maschenströme ermittelten übereinstimmt.

1.12 Knotenpotenzialverfahren

Das **Knotenpotenzialverfahren** ist der zum Maschenstromverfahren komplementäre Weg. Zu den k unabhängigen Knoten werden auf Basis eines willkürlich gewählten Bezugsknotens k Knotenspannungen U_a, U_b, ... definiert. Daraus lässt sich mit Hilfe der Zweigströme ein System von k Gleichungen für die k unbekannten Knotenspannungen aufstellen.



Zunächst gelten folgende 5 Zusammenhänge (Zählrichtung in den Maschen ist Uhrzeigersinn):

Masche I: $-U_q+R_i\cdot I+U_a=0$ oder $I=\frac{U_q-U_a}{R_i}$

Masche II: $-U_a+R_2\cdot I_2+U_b=0$ oder $I_2=\frac{U_a-U_b}{R_2}$

Masche III: $-U_b+R_4\cdot I_4=0$ oder $I_4=\frac{U_b}{R_4}$

Zweig R_1: $-U_a-R_1\cdot I_1=0$ oder $I_1=-\frac{U_a}{R_1}$

Zweig R_2: $-U_b-R_3\cdot I_3=0$ oder $I_3=-\frac{U_b}{R_3}$.

Werden die Ausdrücke für die 5 Zweigströme in die Knotengleichungen für (a) und (b) eingesetzt, also

Knoten (a): $I+I_1-I_2=0$

Knoten (b): $I_2+I_3-I_4=0$,

dann erhält man zwei Gleichungen für die beiden unbekannten Knotenspannungen U_a und U_b

$$\frac{U_q-U_a}{R_i}-\frac{U_a}{R_1}-\frac{U_a-U_b}{R_2}=0$$

$$\frac{U_a-U_b}{R_2}-\frac{U_b}{R_3}-\frac{U_b}{R_4}=0 \quad .$$

Die allgemeine Lösung (die Ausdrücke lassen sich noch weiter vereinfachen) ist

$$U_a \to \frac{R_1\,(R_3\,R_4+R_2\,(R_3+R_4))\,U_q}{(R_3\,R_4+R_2\,(R_3+R_4))\,R_i+R_1\,(R_2\,(R_3+R_4)+R_4\,R_i+R_3\,(R_4+R_i))}$$

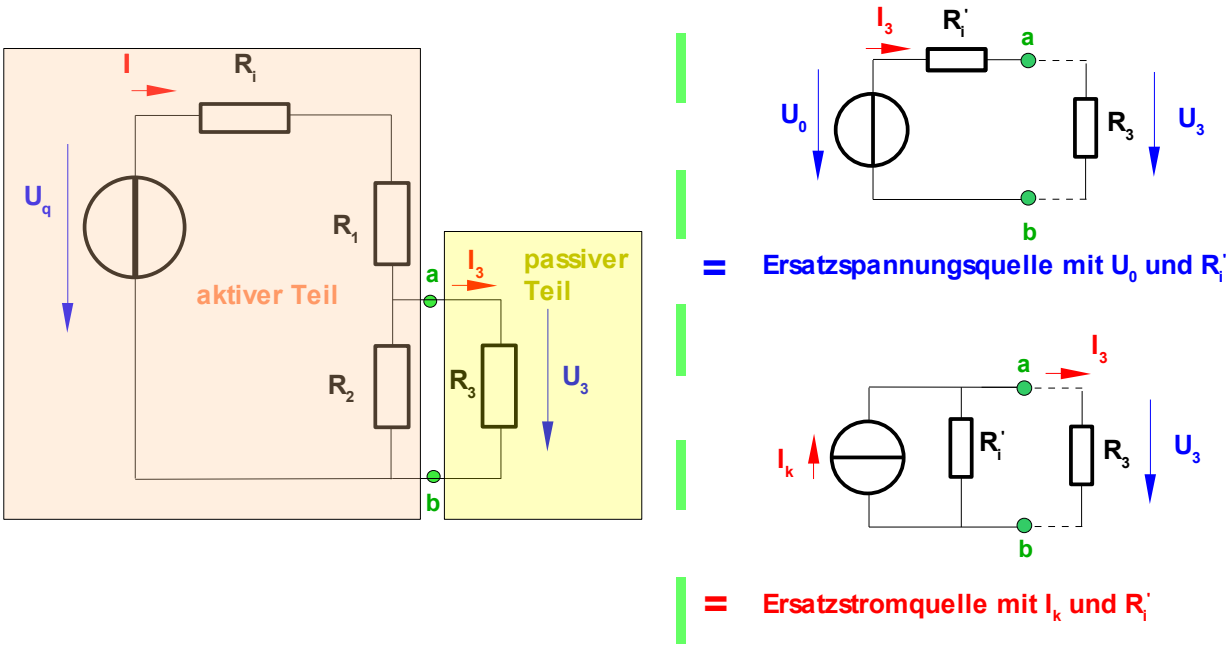
$$U_b \to \frac{R_1\,R_3\,R_4\,U_q}{(R_3\,R_4+R_2\,(R_3+R_4))\,R_i+R_1\,(R_2\,(R_3+R_4)+R_4\,R_i+R_3\,(R_4+R_i))}$$

und mit Werten (in Volt): $U_a \to \frac{600}{7}$ $U_b \to \frac{200}{7}$.

Hieraus können nun mit den oben aufgestellten Gleichungen die Zweigströme ermittelt werden.

1.13 Zweipolverfahren

Das **Zweipolverfahren** ist wie das des **Ersatzwiderstandes** besonders geeignet, wenn nur ein bestimmter Zweigstrom statt aller berechnet werden soll. Es nutzt die Eigenschaft, dass sich jedes (lineare) Netzwerk bezüglich zweier Punkte a und b in einen aktiven Teil mit Quellen und einen passiven Teil aus Verbrauchern aufteilen lässt. Den aktiven Teil kann man dann durch eine einzige Spannungs- oder Stromquelle mit Innenwiderstand R_i' so ersetzen, dass sich für den Verbraucher nichts ändert. Dies vereinfacht die Berechnung des vom Verbraucher aufgenommenen Stromes I_3.



Im obigen Beispiel lässt sich ohne Ersatzquellen der Zweigstrom I_3 zum Beispiel mit Hilfe des Ersatzwiderstandsverfahrens bestimmen. Dabei wird zunächst der Strom I ermittelt:

$$I=\frac{Uq}{R_i+R_1+\frac{R_2\cdot R_3}{R_2+R_3}}=\frac{R_2+R_3}{R_i\cdot R_2+R_i\cdot R_3+R_1\cdot R_2+R_1\cdot R_3+R_2\cdot R_3}\cdot U_q$$

Die Stromteilerregel für $R_2 \parallel R_3$ ergibt

$$I_3=\frac{R_2}{R_2+R_3}\cdot I=\frac{R_2}{R_i\cdot R_2+R_i\cdot R_3+R_1\cdot R_2+R_1\cdot R_3+R_2\cdot R_3}\cdot U_q \quad .$$

Für die Anwendung des Zweipolverfahrens werden zunächst die Kenngrößen **Leerlaufspannung U_0, Kurzschlussstrom I_k** und **Innenwiderstand R_i'** der Ersatzquellen bestimmt. Dazu entfernt man den passiven Teil (= den Verbraucher) und berechnet - oder misst - an den Klemmen a und b sowohl den Kurzschlussstrom **I_k** ($R_3 = 0$) als auch die Leerlaufspannung **U_0** ($R_3 \rightarrow \infty$), woraus sich der Innenwiderstand R_i' ermitteln lässt:

$$U_0=\frac{R_2}{R_i+R_1+R_2}\cdot U_q$$

$$I_k = \frac{1}{R_i + R_1} \cdot U_q$$

$$R_i' = \frac{U_0}{I_k} = \frac{R_i \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2}{R_i + R_1 + R_2} \quad .$$

Eine Probe zeigt, dass die Anwendung des Verfahrens tatsächlich den gleichen Strom I_3 ergibt. Mit der Ersatzspannungsquelle erhält man

$$I_3 = \frac{1}{R_i' + R_3} \cdot U_0 = \frac{1}{\frac{R_i \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2}{R_i + R_1 + R_2} + R_3} \cdot \frac{R_2}{R_i + R_1 + R_2} \cdot U_q = \frac{R_2}{R_i \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_i + R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2} \cdot U_q$$

Für die Ersatzstromquelle gilt (Stromteilung beachten):

$$I_3 = \frac{R_i'}{R_i' + R_3} \cdot I_k = \frac{\frac{R_i \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2}{R_i + R_1 + R_2}}{\frac{R_i \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2}{R_i + R_1 + R_2} + R_3} \cdot \frac{1}{R_i + R_1} \cdot U_q = \frac{R_2}{R_i \cdot R_2 + R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_i + R_3 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_2} \cdot U_q \quad .$$

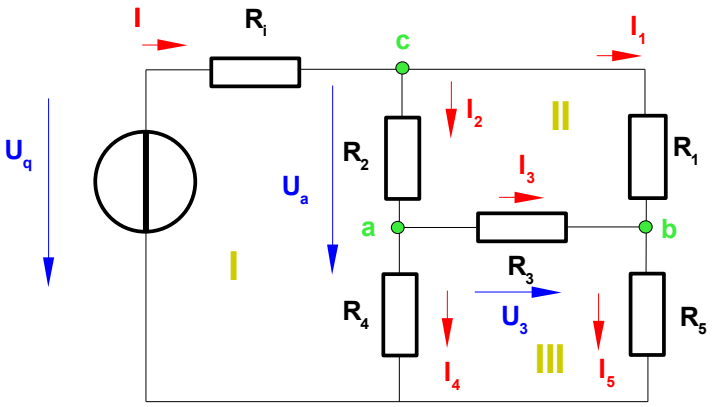
Die **Gleichwertigkeit von Ersatzspannungs- und Ersatzstromquellen** gestattet auch deren Umwandlung ineinander. Dies kann uneingeschränkt angewendet werden, um im Einzelfall eine für Berechnungen günstigere Darstellungen zu erreichen.

Nachdem nun einige Berechnungsverfahren für lineare Gleichstromnetzwerke dargestellt wurden, folgt nun eine kleine Zusammenfassung und Übersicht hierzu, wobei als Ziel jeweils die Bestimmung der Zweigströme angenommen wird, die Zweigspannungen lassen sich dann daraus ermitteln:

Nr.	Verfahren	Bemerkungen (Jedes Verfahren ist uneingeschränkt einsetzbar, eine Empfehlung für die günstigste Wahl hängt stark vom vorliegenden Einzelfall ab).
1	KKG-KMG	Das „Urverfahren“, es ergibt ein System von n=m+k Gleichungen für die n unbekannten Zweigströme. Sehr gut zur Lösung mit Rechenprogrammen geeignet, nur in Sonderfällen für Handrechnung.
2	Ersatzwiderstand	Oft für Handrechnung geeignet, insbesondere, wenn nur ein einzelner Zweigstrom zu ermitteln ist. Es werden schrittweise einzelne Widerstände über Reihen- und Parallelschaltungen zusammengefasst.
3	Maschenströme	Ergibt ein System von m Maschenstromgleichungen, daher im allgemeinen eher für Handrechnung geeignet als „KKG-KMG“, insbesondere, wenn m < k. die Zweigströme müssen anschließend aus den Maschenströmen bestimmt werden.
4	Knotenpotenziale	Ergibt ein System von k Knotenspannungsgleichungen, daher im allgemeinen eher für Handrechnung geeignet als „KKG-KMG“. Die Zweigströme müssen anschließen über die Knotenspannungen bestimmt werden.

Nr.	Verfahren	Bemerkungen (Jedes Verfahren ist uneingeschränkt einsetzbar, eine Empfehlung für die günstigste Wahl hängt stark vom vorliegenden Einzelfall ab).
5	Zweipol (Ersatzspannungsquelle, Ersatzstromquelle)	Ähnlich wie bei „Ersatzwiderstand“, vielseitig zur Vereinfachung eines Netzwerks einsetzbar.
6	Überlagerung	Hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt

Für Handrechnungen kann man zunächst das Verfahren des Ersatzwiderstandes erwägen, um schnell zum Ziel zu kommen. Bei bestimmten Netzwerktopologien, die auch praktische Bedeutung haben, gelingt dies allerdings nicht direkt. Als Beispiel dient die folgende Brückenschaltung, bei der z. B. der Strom I_3 im Brückenwiderstand R_3 berechnet werden soll.



Mit dem KKG-KMG-Verfahren erhält man für die 6 unbekannten Ströme I, I_1, ..., I_5 3 Gleichungen für die Maschen I, II, III und 3 Gleichungen für die 3 Knoten a, b, c. Die Lösung ist:

$$I_0 \rightarrow \frac{(R_3 (R_4+R_5)+R_1 (R_3+R_4+R_5)+R_2 (R_3+R_4+R_5)) U_q}{R_1 (R_4 R_5+R_2 (R_3+R_4+R_5)+R_4 R_i+R_5 R_i+R_3 (R_4+R_i))+R_3 (R_5 R_i+R_4 (R_5+R_i))+R_2 (R_5 R_i+R_3 (R_5+R_i)+R_4 (R_5+R_i))}$$

$$I_1 \rightarrow \frac{(R_3 R_4+R_2 (R_3+R_4+R_5)) U_q}{R_1 (R_4 R_5+R_2 (R_3+R_4+R_5)+R_4 R_i+R_5 R_i+R_3 (R_4+R_i))+R_3 (R_5 R_i+R_4 (R_5+R_i))+R_2 (R_5 R_i+R_3 (R_5+R_i)+R_4 (R_5+R_i))}$$

$$I_2 \rightarrow \frac{(R_3 R_5+R_1 (R_3+R_4+R_5)) U_q}{R_1 (R_4 R_5+R_2 (R_3+R_4+R_5)+R_4 R_i+R_5 R_i+R_3 (R_4+R_i))+R_3 (R_5 R_i+R_4 (R_5+R_i))+R_2 (R_5 R_i+R_3 (R_5+R_i)+R_4 (R_5+R_i))}$$

$$I_3 \rightarrow \frac{(R_1 R_4-R_2 R_5) U_q}{R_1 (R_4 R_5+R_2 (R_3+R_4+R_5)+R_4 R_i+R_5 R_i+R_3 (R_4+R_i))+R_3 (R_5 R_i+R_4 (R_5+R_i))+R_2 (R_5 R_i+R_3 (R_5+R_i)+R_4 (R_5+R_i))}$$

$$I_4 \rightarrow \frac{((R_2+R_3) R_5+R_1 (R_3+R_5)) U_q}{R_1 (R_4 R_5+R_2 (R_3+R_4+R_5)+R_4 R_i+R_5 R_i+R_3 (R_4+R_i))+R_3 (R_5 R_i+R_4 (R_5+R_i))+R_2 (R_5 R_i+R_3 (R_5+R_i)+R_4 (R_5+R_i))}$$

$$I_5 \rightarrow \frac{((R_1+R_3) R_4+R_2 (R_3+R_4)) U_q}{R_1 (R_4 R_5+R_2 (R_3+R_4+R_5)+R_4 R_i+R_5 R_i+R_3 (R_4+R_i))+R_3 (R_5 R_i+R_4 (R_5+R_i))+R_2 (R_5 R_i+R_3 (R_5+R_i)+R_4 (R_5+R_i))}$$

Für die Parameter U_q = 100 V, R_i = 10 Ohm, $R_1 = R_5$ = 100 Ohm, $R_2 = R_4$ = 200 Ohm, R_3 = 50 Ohm nehmen die Ströme folgende Werte (in Ampere) an:

$$I_0 \rightarrow \frac{30}{43} \quad I_1 \rightarrow \frac{20}{43} \quad I_2 \rightarrow \frac{10}{43} \quad I_3 \rightarrow 0 \quad I_4 \rightarrow \frac{10}{43} \quad I_5 \rightarrow \frac{20}{43}$$

Der Brückenstrom I_3 ist in diesem Fall 0, die Schaltung befindet sich im **abgeglichenen Zustand**, da das Verhältnis $R_2/R_4 = R_1/R_5$ ist und sich gleiche Spannungen an den Knoten a und b einstellen. Man nutzt diese Eigenschaft von **Brückenschaltungen** zum **hoch genauen Messen** von **Widerständen** und **Spannungen**.

Bei geändertem Widerstand - z. B. von R_2 - und U_q = 100 V, R_i = 10 Ohm, $R_1 = R_5$ = 100 Ohm, R_2 = 100 Ohm, R_4 = 200 Ohm, R_3 = 50 Ohm ist die Brücke nicht abgeglichen und die Ströme haben die Werte

$$I_0 \rightarrow \frac{170}{217} \quad I_1 \rightarrow \frac{90}{217} \quad I_2 \rightarrow \frac{80}{217} \quad I_3 \rightarrow \frac{20}{217} \quad I_4 \rightarrow \frac{60}{217} \quad I_5 \rightarrow \frac{110}{217}\,.$$

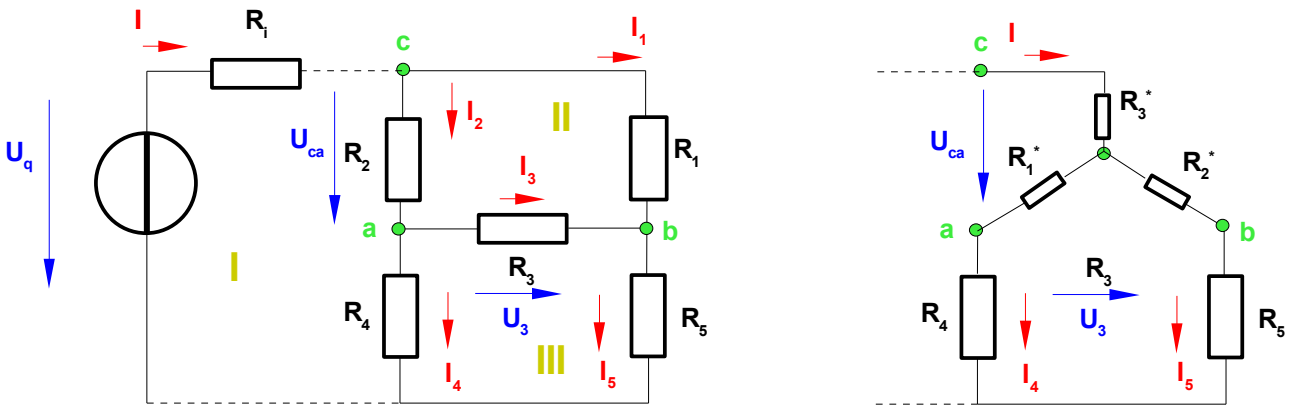
Davon abgesehen ist die Handlösung des Gleichungssystems wegen des Aufwands nicht praktikabel. Der wesentliche Beitrag durch den Bearbeiter besteht in der Aufstellung der Gleichungen, deren Eingabe in ein Programm und die Überprüfung der Ergebnisse auf Plausibilität.

> ***Fragen:*** *Wie kann man unter Verwendung einer Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_q, eines Strommessgeräts (kleiner Innenwiderstand R_{iStrom}) und eines Spannungsmessgeräts(großer Innenwiderstand $R_{iSpannung}$) den Wert eines unbekannten Widerstandes bestimmen? Wäre diese Messung im Rahmen der Genauigkeit der beiden Messgeräte (±5%) genau?*

> ***Frage:*** *Wie kann man mit einer Brückenschaltung den Wert eines unbekannten Widerstandes messen? Hinweis: Man nutze die Möglichkeit der abgeglichenen Brücke. Wäre dieses Verfahren prinzipiell genauer als durch die Strom- und Spannungsmessung?*

1.14 Stern-Dreieck- und Dreieck-Stern-Umwandlung

Ein anderer Weg wäre die Berechnung der Ströme I_4 und I_5, der Spannungen an R_4 und R_5 und daraus des Stromes I_3. Dazu ist zunächst der Strom I erforderlich, für dessen Berechnung man den Gesamtwiderstand an der Spannungsquelle braucht. Dieser Gesamtwiderstand lässt sich bei der vorliegenden Topologie durch nur schrittweises Zusammenfassen in Reihe und parallel geschalteter Widerstände aber nicht bestimmen. Betrachtet man nun den zwischen den Knoten a, b und c liegenden Netzwerkteil, so stellt dies topologisch ein Dreieck dar. Dieser lässt sich in eine Sternschaltung mit 3 Widerständen R_1^*, R_2^*, R_3^* umwandeln, welche die gleichen Ströme I, I_4 und I_5 und Dreieckspannungen U_{ca} , U_{cb} und U_{ac} bewirken wie in der Originalschaltung. Damit hat sich nach außen nichts geändert. Man nennt diese Maßnahme **Dreieck-Stern-Umwandlung**, sie ist als **Stern-Dreieck-Umwandlung** auch umkehrbar. Im Beispiel sieht das so aus:



Um die Sternwiderstände aus den Dreieckwiderständen zu berechnen, kann man zum Beispiel die beiden Ströme I und I_4 sowie die Dreieckspannung U_{ca} vorgeben. Diese müssen in der Sternschaltung erhalten bleiben. Für die Dreieckschaltung gilt:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U_{cb}}{R1} + \frac{U_{ca}}{R2} \qquad \text{(I)}$$

$$U_{ab} = U_{cb} - U_{ca} \qquad \text{(II)}$$

$$I_4 = I_2 - I_3 = \frac{U_{ca}}{R_2} - \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{U_{ca}}{R_2} + \frac{U_{ca}}{R_3} - \frac{U_{cb}}{R_3} = \frac{-U_{cb}}{R_3} + \frac{R_2 + R_3}{R_2 \cdot R_3} \cdot U_{ca} \qquad \text{(III)}$$

Gleichung (I) mit R_1/R_3 multipliziert und zu (III) addiert ergibt:

$$U_{ca} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot I + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot I_4 \qquad \text{(IV)}$$

In der Sternschaltung ist

$$U_{ca} = R_3^* \cdot I + R_1^* \cdot I_4 \qquad \text{(V)}$$

Da U_{ca}, I und I_4 vorgegeben sind, müssen die Koeffizienten übereinstimmen, aus (IV) und (V) folgt:

$$R_1^* = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad =$$

$$R_3^* = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad .$$

Wegen der zyklischen Anordnung kann man die Indices vertauschen und erhält (worauf man auch durch einen anderen Satz von Gleichungen käme):

$$R_2^* = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad .$$

Bei der Stern-Dreieckumwandlung geht man den umgekehrten Weg. Für den Strom I gilt im Dreieck

$$I = I_1 + I_2 \quad ,$$

für die Dreieckspannungen links und rechts

$$U_{ca} = R_3^* \cdot I + R_1^* \cdot I_4 = R_3^* \cdot I + R_1^* \cdot (I - I_5) = (R_3^* + R_1^*) \cdot I - R_1^* I_5 \qquad \text{(VI)}$$

$$U_{cb} = R_3^* \cdot I + R_2^* \cdot I_5 \qquad \text{(VII).}$$

Der Strom I ist wegen $I = I_1 + I_2$ außerdem

$$I = \frac{1}{R_2} \cdot U_{ca} + \frac{1}{R_1} \cdot U_{cb} \qquad \text{(VIII):}$$

Zur Auflösung von (VI) und (VII) nach I wird (VI) mit R_2^*/R_1^* multipliziert und das Ergebnis zu (VII) addiert. Daraus erhält man

$$\frac{R_2^*}{R_1^*} \cdot U_{ca} + U_{cb} = \left[\frac{R_2^*}{R_1^*} \cdot (R_3^* + R_1^*) + R_3^* \right] \cdot I \quad , \qquad \text{oder nach I}$$

$$I = \frac{R_2^*}{R_1^* \cdot R_2^* + R_1^* \cdot R_3^* + R_2^* \cdot R_3^*} \cdot U_{ca} + \frac{R_1^*}{R_1^* \cdot R_2^* + R_1^* \cdot R_3^* + R_2^* \cdot R_3^*} \cdot U_{cb} \qquad \text{(IX).}$$

Der Vergleich von (VIII) und (IX) ergibt wegen der Unabhängigkeit dieser beiden Gleichungen von I, U_{ca} und U_{cb} die gesuchten Umrechnungsformeln:

$$R_1=\frac{R_1^*\cdot R_2^*+R_1^*\cdot R_3^*+R_2^*\cdot R_3^*}{R_1^*}=R_2^*+R_3^*+\frac{R_2^*\cdot R_3^*}{R_1^*}$$

$$R_2=\frac{R_1^*\cdot R_2^*+R_1^*\cdot R_3^*+R_2^*\cdot R_3^*}{R_2^*}=R_1^*+R_3^*+\frac{R_1^*\cdot R_3^*}{R_2^*}$$

Auch hier gestattet die zyklische Anordnung die Vertauschung der Indices, so dass man R_3 als

$$R_3=\frac{R_1^*\cdot R_2^*+R_1^*\cdot R_3^*+R_2^*\cdot R_3^*}{R_3^*}=R_1^*+R_2^*+\frac{R_1^*\cdot R_2^*}{R_3^*}$$ erhält.

Die abgeleiteten Formeln gelten für die Dreipunkt-Topologie. Allgemein kann jeder n-strahlige Stern eindeutig in das zugeordnete vollständige n-Eck umgewandelt werden (jeder Knoten ist dann mit jedem anderen verbunden). Die Umkehrung, also die Umwandlung eines vollständigen n-Ecks in einen n-strahligen Stern ist für n > 3 im Allgemeinen in eindeutiger Weise aber nicht möglich, da es dann mehr Gleichungen als Unbekannte gibt. Der Fall n = 3 wird allerdings häufig gebraucht, u. a. In der Drehstromrechnung.

Mit Hilfe der Dreieck-Stern-Umwandlung kann man nun den Brückenstrom I_3 berechnen. Dazu wird zunächst mit Hilfe der Parallelschaltung $(R_1^* + R_4) \parallel (R_2^* + R_5))$ der Strom I

$$I=\frac{U_q}{R_i+R_3^*+\frac{(R_1^*+R_4)\cdot(R_2^*+R_5)}{R_1^*+R_2^*+R_4+R_5}}=\frac{R_1^*+R_2^*+R_4+R_5}{(R_i+R_3^*)\cdot(R_1^*+R_2^*+R_4+R_5)+(R_1^*+R_4)\cdot(R_2^*+R_5)}\cdot U_q$$

bestimmt, dann über die Stromteilerregel die Ströme I_4 und I_5

$$I_4=\frac{R_2^*+R_5}{R_1^*+R_2^*+R_4+R_5}\cdot I$$

$$I_5=\frac{R_1^*+R_4}{R_1^*+R_2^*+R_4+R_5}\cdot I \quad ,$$

daraus wiederum

$$U_3=U_4-U_5=R_4\cdot I_4-R_5\cdot I_5$$

und schließlich

$$I_3=\frac{U_3}{R_3}=\frac{R_4}{R_3}\cdot I_4-\frac{R_5}{R_3}\cdot I_5 \quad .$$

Die Auswertung dieses Ergebnisses mit Hilfe eines Programms ergibt für I_3

$$\frac{(R_1 R_4 - R_2 R_5)\, U_q}{R_1\,(R_4 R_5 + R_2\,(R_3 + R_4 + R_5) + R_4 R_i + R_5 R_i + R_3\,(R_4 + R_i)) + R_3\,(R_5 R_i + R_4\,(R_5 + R_i)) + R_2\,(R_5 R_i + R_3\,(R_5 + R_i) + R_4\,(R_5 + R_i))}$$

und damit dasselbe wie über das KKG-KMG-Verfahren. Zur Kontrolle: Für die Parameter $U_q = 100$ V, $R_i = 10$ Ohm, $R_1 = R_5 = 100$ Ohm, $R_2 = 100$ Ohm, $R_4 = 200$ Ohm, $R_3 = 50$ Ohm hat I_3 ebenfalls den Wert

$$I_3 \rightarrow \frac{20}{217} \quad .$$

Aufgabe: Man berechne den Brückenstrom I_3 mit Hilfe des Zweipolverfahrens. Hinweise:

I für $R_3 \rightarrow \infty$ bestimmen, dann Leerlaufspannung $U_{ab0} = U_4 - U_3 = R_4 \cdot I_4 - R_5 \cdot I_5$

I für $R_3 = 0$ bestimmen, dann Kurzschlussstrom $I_{3k} = I_2 - I_4$.

1.15 Widerstandsberechnung bei einfachen geometrischen Widerstandsformen

Bei den bisher betrachteten Netzwerke wurden insofern **ideale Verhältnisse** angenommen, als die Quellen und Widerstände diskrete Elemente (= Bauteile) waren, die durch Leiter (=Drähte, Leiterbahnen auf gedruckten Platinen) mit **unendlich hoher Leitfähigkeit** (= verschwindender Eigenwiderstand) verbunden sind. Dies ist sehr oft mit guter Näherung zulässig, insbesondere dann, wenn die diskreten Bauteil-Widerstände selbst hohe Werte gegenüber den Leiterverbindungen besitzen. Bei **realen Anordnungen** ist es aber wichtig, sich über die tatsächlichen Verhältnisse Rechenschaft abzulegen. So kann der Anschluss eines starken Verbrauchers (z. B. eines Motors) an einen Verteilerkasten über ein langes, dünnes Kabel dazu führen, dass durch die hohen Betriebsströme in der Zuleitung eine großer Spannungsabfall entsteht, der die Motorleistung herabsetzt und das Kabel erwärmt. Oder: Der Zuleitungswiderstand eines Vielfachmessgerätes verfälscht im kleinsten Widerstandsmessbereich unzulässig den gemessenen Wert.

Die Widerstandsberechnung für Leitungen aus bekannten Materialien, Querschnitten und Längen ist mit Hilfe des **spezifischen Widerstandes ρ_{20}** möglich:

$$R = \rho_{20} \cdot \frac{l_l}{A_F} \quad [\text{Ohm}]$$ mit l_l = Länge in m , A_F = Querschnittsfläche des Drahtes in mm².

Aus Tabellen kann man entnehmen:

Kupfer:	$\rho_{20} = 0.01786$	$\left[\text{Ohm} \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}\right]$
Silber:	$\rho_{20} = 0.016$	"
Gold:	$\rho_{20} = 0.023$	"
Aluminium:	$\rho_{20} = 0.02857$	"

Fragen: *Ein Einphasen-Motor mit 230 V Nennspannung und 1 KW Nennleistung soll über ein 2-adriges 200 m langes Kabel mit 0,75 mm² Querschnitt an einen Verteilerkasten angeschlossen werden. Wie groß ist der Spannungsabfall im Nennbetrieb, welche Wärmeleistung wird in der Zuleitung umgesetzt? Der Innenwiderstand der Spannungsquelle kann als sehr klein gegen den Verbraucherwiderstand angesehen werden.* ***Hinweis:*** *Obwohl hier Wechselstrombetrieb vorliegt, kann die Rechnung mit den Hilfsmitteln der Gleichstromrechnung durchgeführt werden, die Erklärung folgt weiter hinten.*

Die Angabe ρ_{20} bedeutet, dass sich der spezifische Widerstand auf eine Materialtemperatur von 20 Grad Celsius bezieht. Der spezifische Widerstand der meisten Materialien ist allerdings **temperaturabhängig** (Achtung: Das hat nichts mit Nichtlinearität zu tun). Man berücksichtigt dies durch Temperaturkoeffizienten α [Ohm/Grad Celsius Temperaturdifferenz zu 20 Grad], β [Ohm/(Grad Celsius Temperaturdifferenz zu 20 Grad)^2] usw. :

$$R = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T + \beta \cdot (\Delta T)^2 + \ \ldots\ ) \cdot \frac{l_l}{A_F} \ [\text{Ohm}]$$

Ob die Temperaturkorrektur angewendet werden muss, kann man an der Größe der Koeffizienten abschätzen. Bei Kupfer ist

$$\alpha = 3.93 \cdot 10^{-3} \left[\frac{1}{\text{Grad Celsius Temperaturdifferenz}} \right]$$

$$\beta = 0.6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{(\text{Grad Celsius Temperaturdifferenz})^2} \right] .$$

Die Korrektur wird hier über den linearen Term α offensichtlich erst ab ca. 50 Grad Temperaturdifferenz einen nennenswerten Beitrag liefern, der quadratische Beitrag ab ca. 200 Grad.

> ***Frage:*** *Welche Widerstandsänderung erfährt ein 2-adriges Kupferkabel mit 1,5 mm² Querschnitt und 100 m Länge bei einer Eigenerwärmung von 20 auf 60 Grad Celsius?*

Die **Legierung Konstantan** hat sogar einen negativen Koeffizienten α = -0.0035 und eignet sich daher zur Temperaturkompensation (z. B. bei frequenzbestimmenden Widerständen in einem Schwingungserzeuger = Oszillator).

> ***Frage:*** *Wie lang muss ein Konstantandraht im Verhältnis zu einem Kupferdraht mit gleichem Querschnitt sein, damit bis zu einer Differenz von 60 Grad zu 20 Grad Celsius angenähert Temperaturunabhängigkeit besteht?*

2 Elektrische Strömungsfelder (Gleichstromfelder)

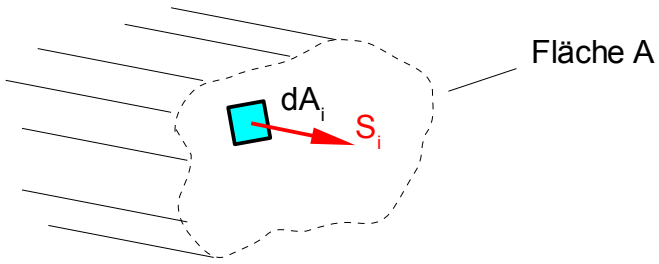
2.1 Stromdichte S

Bei geometrisch einfach geformten Materialien ist die Widerstandsbestimmung mit Hilfe der angegeben Formel häufig ebenfalls einfach. Dabei wird vorausgesetzt, dass der Strom **gleichmäßig** durch das Material fließt. Das trifft bei Gleichstrom z. B. in langen Drähten, Bändern oder Stromschienen konstanten Querschnitts in einigem Abstand von den Enden der Stromeinleitung (Lötstellen, Klemmen) zu, bei den meisten anderen Formen aber nicht. Wie kann man hierfür den Widerstand ermitteln? Die Antwort ist vor allem aus zwei Gründen von Interesse:

- Zur Bestimmung des Gesamtwiderstandes einer geometrisch beliebig geformten Anordnung von elektrisch leitendem Material zwischen den Kontaktflächen der Stromeinleitung, auch bei geschichteten Materialien mit verschiedenen Leitwerten
- und – fast noch wichtiger – zur Ortsbestimmung der stärksten Strombelastung, da dort das Material durch Erhitzung am meisten bealstet wird (ähnlich der stärksten mechanischen Spannungsbeansprucuhng durch äußere Kräfte und/oder Momente)

Beispiele sind die Restströme durch isolierte Leitungen, welche bei zum Auslösen von Fehlerstromschutzschaltungen führen können oder die Schrittspannungsabschätzung bei Erdungsanlagen für Blitzschlag.

Die Lösung damit zusammenhängender Aufgabestellungen lässt sich über die Erscheinung der **Strömungsfelder** bearbeiten. Hierzu betrachtet man den Stromverlauf durch das Material „im Kleinen“. Der Gesamtstrom I verteilt sich auf dünne „Stromfäden“ ΔI_i.



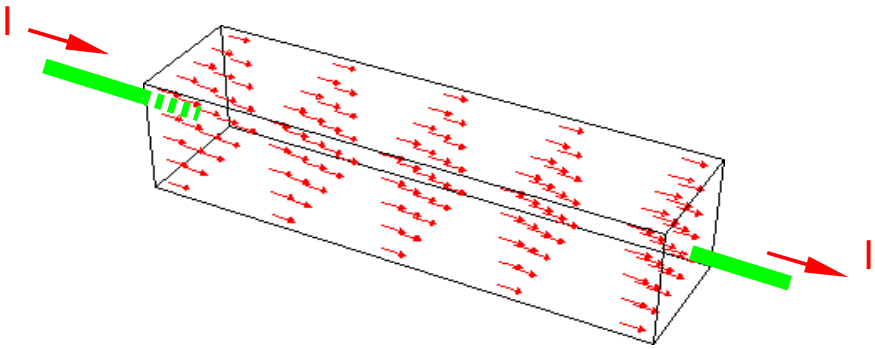
Würde man an einem geometrisch ungleichmäßig geformten Material den Strom dI_i durch das Material senkrecht zur Fließrichtung an sehr kleinen, aber gleich großen Flächenelementen ΔA_i messen, so würde man feststellen, dass die „Strommenge“ ΔI_i durch verschiedene Flächenelemente ΔA_i verschieden sein kann. Damit wird auch der Quotient

$$S_i = \frac{\Delta I_i}{\Delta A_i} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

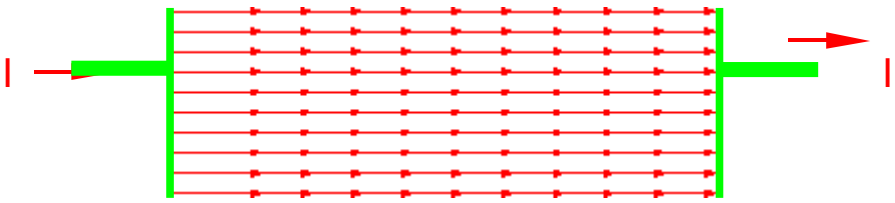
von Flächenelement zu Flächenelement verschieden sein. Man bezeichnet S_i als **Stromdichte**. Über die gesamte Querschnittsfläche A muss natürlich weiterhin der gesamte Strom I fließen. Bildet man also die Summe der Quotienten aus den Stromanteilen und Flächenelementen, so erhält man den Gesamtstrom I. Lässt man die Flächenelemente ΔA_i beliebig klein werden (dabei läuft die Anzahl n gegen Unendlich), dann wird die Unterscheidung sehr fein, die Flächenelemente gehen gegen dA_i und die Summe wird zum Integral der Stromdichte S über die Gesamtfläche A:

$$I = \sum_i^n S_i \Delta A_i \overset{n\to\infty}{\to} \int_A S\,dA \quad [A]$$

Gegenüber dem Strom I weist die Stromdichte S dabei eine Besonderheit auf: Während der Strom I eine skalare Größe ähnlich der Temperatur darstellt, hat die Stromdichte sowohl eine Größe als auch eine Richtung im Raum und ist daher ein **Vektor**. Ein Draht mit konstanter Querschnittsfläche, bei dem der Strom I links ein- und rechts austritt, zeigt dann etwa folgende konstante Verteilung der Stromdichtevektoren $\vec{S}$:



oder in der seitlichen Sicht



Dies ist allerdings nur eine Hilfsvorstellung, da die Strömung in Wirklichkeit **kontinuierlich** über den gesamten Querschnitt und nicht auf diskreten Bahnen fließt. Die überall gleiche Länge der Stromdichtevektoren deutet hier an, dass sie überall die gleiche Größe aufweisen. Auch jedes Flächenelement dA ist als **Vektor** definiert. Es hat eine **Größe** und eine **Richtung**. Dabei ist die Richtung im Raum durch den auf der Fläche senkrecht stehenden Vektor festgelegt. Die oben angegebenen Formeln müssen daher allgemein in der Vektorform geschrieben werden:

$$I=\sum_{i}^{n}\vec{S}_i d\vec{A}_i \overset{n\to\infty}{\to} \int_A \vec{S}\, d\vec{A} \quad .$$

Das Produkt der beiden Vektoren $\vec{S}$ und $d\vec{A}$ ist hier ein **Skalarprodukt**. Sind die beiden Vektoren mit ihren Komponenten in kartesischen Koordinaten (x, y, z) gegeben, so berechnet sich das Skalarprodukt für den durch das kleine Flächenelement tretenden Stromanteil dI als

$$dI=[S_x, S_y, S_z]\cdot[dA_x, dA_y, dA_z]=S_x\cdot dA_x+S_y\cdot dA_y+S_z\cdot dA_z \quad .$$

Kennt man die Beträge (= Größen) der Vektoren und den von ihnen eingeschlossenen Winkel α, dann gilt auch

$$dI=|\vec{S}|\cdot|d\vec{A}|\cdot\cos\alpha \quad .$$

Der **Integrand** stellt als Vektorprodukt bereits eine skalare Größe dar. Durch die Integration werden alle einzelnen Stromanteile dI zum Gesamtstrom I aufaddiert. Bei einigen geometrischen Anordnungen (Zylinder, Kugeln, Ringe und andere) kann man das Koordinatensystem so wählen und legen, dass die Stromdichte- und Flächenelement-Vektoren von vornherein parallel liegen. Dann nimmt wegen α = 0 das Skalarprodukt die Form

$$dI=|\vec{S}|\cdot|d\vec{A}|\cdot\cos 0=S\cdot dA$$

an, bei der die Vektorkennzeichnung wegfallen kann. Die Auswertung des Integrals wird hier besonders einfach.

2.2 Strömungsfeld und elektrische Feldstärke E

Die Vektorschreibweise für die Stromdichte hat den Grund, dass die Stromdichte als gedachte Linien mit einer bestimmten Richtung verlaufen. Alle Linien zusammen bilden das **Feld** der Stromdichte, auch **Strömungsfeld** genannt. Noch einen Hinweis hierzu: Statt die Stärke des Feldes wie oben durch die Länge der einzelnen Stromdichtevektoren zu kennzeichen, findet man auch die Vorstellung, dass dort, wo die Linien dicht beieinander verlaufen, ein starkes Feld herrscht, und dort, wo sie weiter auseinander liegen, das Feld schwächer ist. Dies stellt jedoch ebenfalls nur eine gedankliche Hilfe dar, Felder kann man direkt nicht „sehen“. Andererseits lässt sich die Wirkung von Feldern eindeutig messen und die Ergebnisse decken sich vollständig mit dieser abstrakten Vorstellung, so dass es gerechtfertigt ist, dies zu verwenden.

Die Stromdichte $\vec{S}$ an jedem Flächenelement wird durch eine Wirkung erzeugt, die im Gefälle des Ladungsträgerstromes gesehen werden kann. Dabei gilt, dass die Stromdichte proportional zur Größe dieses Gefälles ist. Das Gefälle ist damit ebenfalls ein Feld mit demselben Verlauf wie derjenige der Stromdichte. Dieses Feld nennt man **elektrische Feldstärke** $\vec{E}$, sie spielt in der Elektrotechnik eine bedeutende Rolle. Ihre Einheit ist V/m und der Zusammenhang lässt sich mit

$$\vec{S}=\kappa\cdot\vec{E} \quad \left[\frac{m}{\Omega\cdot mm^2}\cdot\frac{V}{m}=\frac{A}{mm^2}\right]$$

ausdrücken.

2.3 Elektrisches Feld, elektrisches Potenzial und elektrische Spannung

Zwischen zwei Punkten in einem elektrischem Feld kann eine elektrische Spannung gemessen werden. Sie hängt mit der Feldstärke über das **Linienintegral**

$$U_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad \left[\frac{V}{m}\cdot m = V\right]$$

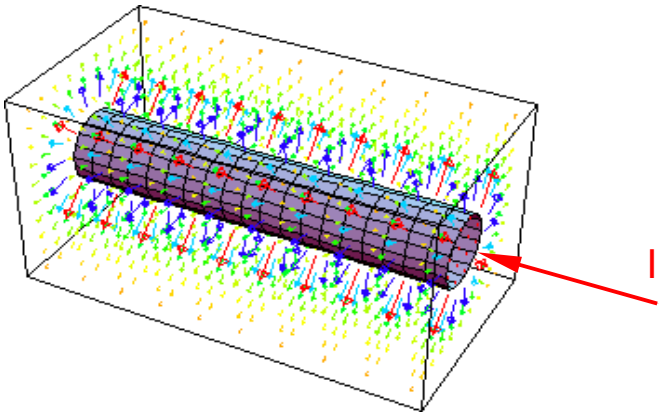
zusammen. Während bei den „üblichen“, aus der Schule bekannten Integralen als Basislinie für die Integration die horizontale x-Achse verwendet wird, ist die Basislinie bei Linienintegralen ein beliebiger Verlauf, also irgendein Weg in der Ebene. Auch hier bilden die beiden vektoriellen Größen $\vec{E}$ und $d\vec{s}$ ein Skalarprodukt. Allerdings gibt es in einem elektrischen Feld Punkte, zwischen denen keine Spannung messbar ist. Solche zusammengehörigen Punkte bilden eine Linie, welche senkrecht auf den gedachten Linien der elektrischen Feldstärke steht. Sie weisen das gleiche **elektrische Potenzial** φ auf und heißen daher **Äquipotenziallinien** (oder **Äquipotenzialflächen** im Raum). Die Differenz zwischen zwei elektrischen Potenzialen φ_a und φ_b stellt die Spannung U_{ab} dar

$$U_{ab} = \phi_a - \phi_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{s} \quad .$$

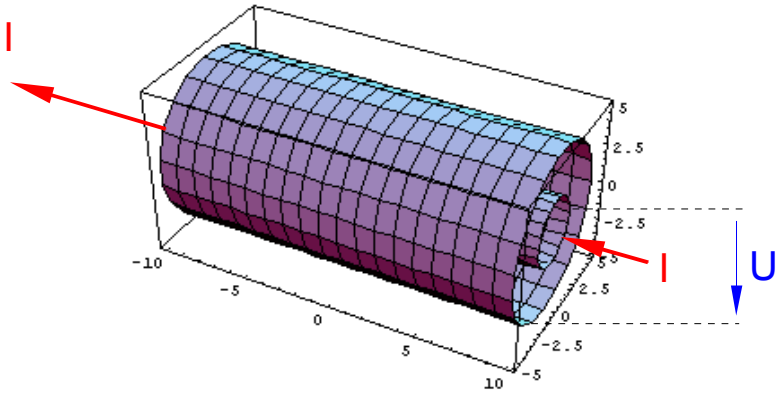
Elektrische Potenziale eignen sich gut als Bezugsgrößen für Spannungsmessungen. Z. B. kann man dem Haus-Erder das Potenzial $\varphi_{Erde} = 0$ zuordnen und alle im Haus messbaren Spannungen dann hierauf beziehen. Dabei werden unter anderem die für den Menschen gefährlichen Spannungen besser sichtbar.

2.4 Widerstandsberechnung mit Hilfe des Strömungsfeldes

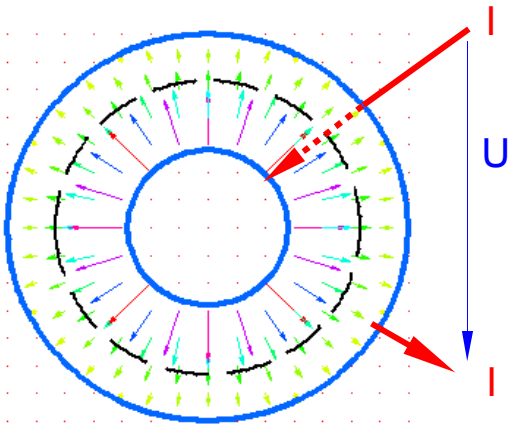
Mit den zuvor angegebenen Beziehungen lassen sich nun unter anderem die Widerstände komplexer geometrischer Materialanordnungen berechnen. Als Beispiel wird ein langer, ideal leitender Metallzylinder der Länge L mit dem Radius R_i betrachtet, der in einem Material mit dem spezifischen Leitwert κ eingebettet ist. Außerdem soll $L >> R_i$ sein.



Wird dieser Elektrode der Strom I zugeführt, so fließt er aus Symmetriegründen radial aus der Oberfläche in das umgebende Material hinein. Ein zweiter Metallzylinder mit dem Radius R_a ist koaxial zu dem inneren Zylinder angeordnet, aus dem der Strom I wieder heraus fließt.



Im Querschnitt zeigt sich folgendes Bild:



Welchen Widerstand weist diese Anordnung nun auf? Die Antwort findet man über die Betrachtung der Stromdichte. An der inneren Zylinderoberfläche ist ihr Betrag

$$S=S(R_i)=\frac{I}{2\cdot R_i\cdot\pi\cdot L}$$, der im Abstand r > R_M wegen $$S=S(r)=\frac{I}{2\cdot r\cdot\pi\cdot L}\quad\left[\frac{A}{m^2}\right]$$

umgekehrt proportional zur Entfernung abnimmt. Der Betrag E der elektrischen Feldstärke nimmt wegen

$$E=\frac{S(r)}{\kappa}=\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot r\cdot\pi\cdot L}\quad\left[\frac{A}{\frac{m}{\Omega\cdot mm^2}\cdot m^2}=\frac{V}{m}\right]$$

ebenfalls umgekehrt proportional zu r ab. Da der Strom I durch eine Spannung U erzeugt wird, welche zwischen den beiden Elektroden liegt, gilt für U auch der oben genannte Integralausdruck

$$U_{ia}=\phi_i-\phi_a=-\int_{R_a}^{R_i}\vec{E}\cdot d\vec{s}=\int_{R_i}^{R_a}\vec{E}\cdot d\vec{s}\quad .$$

Da der Feldstärke- und der Linienelementvektor parallel liegen, kann mit den Beträgen weiter gerechnet werden:

$$U_{ia}=\int_{R_i}^{R_a} E\cdot ds=\int_{R_i}^{R_a}\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot r\cdot\pi\cdot L}ds=\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot\pi\cdot L}\int_{R_i}^{R_a}\frac{1}{r}ds=\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot\pi\cdot L}\left[\ln r\right]_{R_i}^{Ra}=\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot\pi\cdot L}\ln\frac{R_a}{R_i}\quad .$$

Der gesuchte Widerstand ist damit der Quotient aus Spannung U und Strom I

$$R_{ia}=\frac{1}{I}\cdot\frac{I}{\kappa\cdot 2\cdot\pi\cdot L}\ln\frac{R_a}{R_i}=\frac{1}{\kappa\cdot 2\cdot\pi\cdot L}\ln\frac{R_a}{R_i}\quad\left[\frac{1}{\frac{m}{\Omega\cdot mm^2}\cdot m}=\Omega\right]\quad .$$

Man hat also sowohl den Widerstand selbst als auch den **Ort der maximalen Materialbelastung** gefunden. Letzterer liegt in der Nähe des inneren Elektrodenmantels, da hier die elektrische Feldstärke am größten ist und die höchste Wärmemenge entsteht. Bei energietechnischen Anordnungen müsste man z. B. durch Flüssigkeitskühlung der inneren Elektrode für einen ausreichenden Wärmeabtransport sorgen. Der Lösungsweg hat allgemeinen Charakter:

- Berechnung der Stromdichteverteilung bei einem angenommenen Gesamtstrom I
- Bestimmung der elektrischen Feldstärkeverteilung E
- Berechnung der Spannung U, die diese Feldstärkeverteilung erzeugt
- Bestimmung des gesuchten Widerstandes als Quotient aus Spannung un Gesamtstrom

2.5 Differenzielle Form zur Beschreibung des Strömungsfeldes

Manchmal lässt sich statt der Stromdichtverteilung leichter eine Funktion für das Potenzial φ angeben, etwa dann, wenn sich die Äquipotenzialflächen φ = const aus Symmetriegründen als einfache mathematische Ausdrücke formulieren lassen. Dann ist statt des Integralzusammenhangs zwischen Potenzial φ (oder Spannung U) mit der Feldstärke E die differenzielle Form nützlich:

$$\vec{E}=-\text{grad}\,\phi=-\left[\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]$$ mit grad = **Gradient** = **mathematischer Operator**.

Die Ausdrücke in der Klammer stellen die **partiellen Ableitungen** von φ(x, y, z) dar. Für den Potenzialausdruck

$$\phi=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

wird $\vec{E}$ z. B.

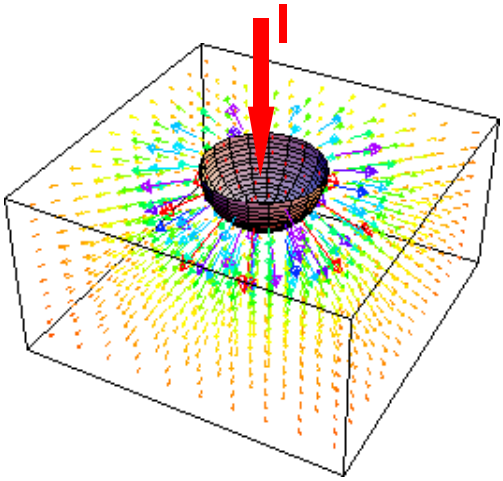
$$\vec{E}=-\text{grad}\,\phi=-\left[\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,2}}\left[2x\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},2z\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},2z\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right]\quad .$$

Eine technisch ebenfalls häufig genutzte Anordnung ist der Halbkugelerder für die Einleitung hoher Gewitter-Entladungsströme aus der Haus-Blitzschutzanlage in das Erdreich. Dieses hat einen von der lokalen Bodenbeschaffenheit und den Feuchtigkeitsverhältnissen abhängigen spezifischen Leitwert κ, wobei man den ungünstigen Fall, also einen niedrigen Leitwert zu Grunde legt. Ein üblicher Wert für Erdreich liegt im

Bereich von

$$\kappa = 2 \cdot 10^{-4} \quad \left[\frac{cm}{\Omega}\right] \quad .$$

Der Strom fließt radial von der gut leitenden metallischen Halbkugelelektrode mit dem Radius R_{HK} in das Erdreich hinein.



Um den Erdungswiderstand bestimmen zu können, stellt man zunächst wieder den Ausdruck für die Stromdichte S = S(r) auf. Für Kugeloberflächen gilt

$$A_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \quad \text{bzw. für Halbkugeln} \quad A_{Halbkugel} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \quad .$$

Damit ist der Betrag der Stromdichte

$$S = S(r) = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \quad \text{und der Betrag der Feldstärke} \quad E = E(r) = \frac{I}{\kappa \cdot 2 \cdot \pi \cdot r^2} \quad .$$

Die Spannung, welche diese Feldstärkeverteilung erzeugt, lässt sich auch hier aus dem Integralzusammenhang berechnen, wobei als obere Integrationsgrenze ein unendlich großer Radius angenommen ist:

$$U = \int_{R_{HK}}^{\infty} E \cdot ds = \int_{R_{HK}}^{\infty} \frac{I}{\kappa \cdot 2 \cdot r^2 \cdot \pi} ds = \frac{I}{\kappa \cdot 2 \cdot \pi} \int_{R_{HK}}^{\infty} \frac{1}{r^2} ds =$$
$$= -\frac{I}{\kappa \cdot 2 \cdot \pi} \left[\frac{1}{r}\right]_{R_{HK}}^{\infty} = -\frac{I}{\kappa \cdot 2 \cdot \pi} \left[0 - \frac{1}{R_{HK}}\right] = \frac{I}{\kappa \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{HK}} \quad .$$

Damit beträgt der gesamte Erdungswiderstand

$$R = \frac{1}{\kappa \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{HK}} \quad [\Omega] \quad .$$

Mit der Feldstärke kann auch die **Schrittspannung** $U_{schritt}$ berechnet werden. Das ist die Potenzialdifferenz auf dem Erdboden, die insbesondere in unmittelbarer Entfernung des Erders nach einem Blitzschlag entsteht und für einen dort stehenden Menschen lebensgefährliche Beträge annehmen kann. Nimmt man an, dass

der Mensch mit einer Schrittbreite von 0,5 m in r_1 = 1 m Abstand radial vom Mittelpunkt des Erders wegsteht und der Erder einen Radius von R_{HK} = 0.2 m aufweist, dann beträgt die Schrittspannung

$$U = \int_{r_1}^{r_1+0.5} E \cdot ds = \frac{I}{\kappa \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + 0.5} \right] .$$

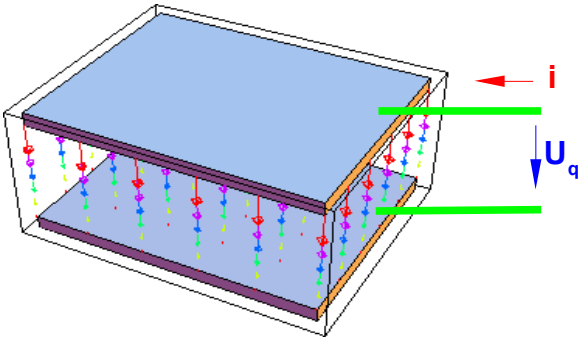
Die Berechnung von Feldern ist im Allgemeinen aufwändig. Häufig kann man – anders als in den durchgesprochenen Fällen – keine geschlossenen Ausdrücke für die Stromdichte oder das Potenzial angeben. Dann bleibt nur die numerische Ermittlung als näherungsweise Lösung der **partiellen Feld-Differentialgleichungen** (den berühmten **Maxwellschen Gleichungen** in der differenziellen Form) unter Berücksichtigung der für eine aktuelle Aufgabe vorliegenden geometrischen und elektrischen **Randbedingungen**.

3 Elektrostatische Felder

Das Gebiet der Strömungsfelder hat die Beschreibung derjenigen elektrischen Verhältnisse zum Ziel, die beim Fließen von Strömen zwischen zwei Elektroden durch ein leitendes Material entstehen. Allerdings lassen sich auch dann elektrische Erscheinungen beobachten, wenn das Medium zwischen den Elektroden aus **nichtleitenden Stoffen** besteht. Darauf bauen einige technisch bedeutsame Anwendungen auf, u. a. die Konstruktion und Berechnung **elektrischer Kondensatoren** und die Vermeidung von **Spannungsüberschlägen** durch zu starke elektrostatischen Felder mit ihren zerstörenden Wirkungen.

Der grundlegende Effekt ist z. B. festzustellen, wenn zwei metallisch leitende Elektroden sich durch Luft oder ein anderes isolierendes Material getrennt gegenüberstehen und an eine Spannungsquelle angeschlossen werden. Nach dem Einschalten fließt durch die Zuleitungsdrähte ein messbarer Strom, der Ladungsstrom. Durch ihn werden elektrische Ladungen auf die Elektroden transportiert, wobei sich zwischen diesen gleichzeitig eine Spannung U aufbaut (**Hinweis:** Genau genommen muss dabei berücksichtigt werden, dass die Zuleitungen selbst einen kleinen ohmschen Widerstand besitzen, der beim Ladungsfluss einen Spannungsabfall erzeugt und das „Springen“ der Spannung an den Elektroden verhindert, was physikalisch wegen der dafür unbegrenzt erforderlichen Leistung unmöglich wäre). Ist die Spannung der Spannungsquelle U_q erreicht, hört der Ladungstransport auf. Da die Ladungen also nicht dauerhaft fließen wie im Strömungsfeld, sondern nur von der Spannungsquelle zu den Elektroden „verschoben“ werden, ist der Strom ein **Verschiebungsstrom**.

Trotz dieses nicht mehr fließenden Verschiebungsstromes ist weiterhin eine Kraftwirkung zwischen den Elektroden auf Ladungen festzustellen, z. B. durch die Bewegung von geladenen Styroporkügelchen. Dies weist auf ein elektrisches Feld hin.



Die Stärke dieses Feldes wird durch die Menge der pro Flächeneinheit auf den Elektroden vorhandenen Ladungsträger bestimmt. Da Ströme hier nur kurzzeitig fließen, wird das dadurch entstehende Feld **elektrosta-**

tisches Feld genannt. Befindet sich auf einem kleinen Flächenelement dA die Ladungsmenge dQ, so gibt der Quotient

$$D=\frac{dQ}{dA}\quad\left[\frac{As}{m^2}\right]$$

die Verschiebungsdichte oder die elektrische Verschiebung D an. Die Gesamtladung lässt sich daraus durch Aufsummieren über die Gesamtfläche A ermitteln:

$$Q=\int_{(A)} D\cdot dA\quad[As]\quad .$$

Dies entspricht in Strömungsfeldern dem Gesamtstrom I, die elektrische Verschiebungsdichte D ist der Stromdichte S vergleichbar. Und wie dort gibt es auch hier ein elektrisches Feld E. Da als Medium zwischen den Elektroden außer Luft (Vakuum) auch alle anderen nichtleitenden Stoffe in Frage kommen, hängt es mit der elektrischen Verschiebung über die Materialgleichung

$$\vec{D}=\epsilon\cdot\vec{E}=\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot\vec{E}\left[\frac{As}{Vm}\cdot\frac{V}{m}=\frac{As}{m^2}\right]$$

zusammen. Der Faktor ε_0 ist die bereits genannte elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0=8{,}854\cdot10^{-12}\frac{C^2}{J\cdot m}=8{,}854\cdot10^{-12}\frac{A\,s}{V\,m}$$

ε_r gibt als relative Dielektrizitätszahl die spezifische Materialeigenschaft enthält. Für einige Stoffe ist ε_r

Azeton	21.5		
Bernstein	1.2		
Diamant	16.5		
Glas	5	bis	7

Die Spannung zwischen den Elektroden und zwischen je zwei Punkten a und b im Dielektrikum lässt sich wie im Strömungsfeld über

$$U_{ab}=\phi_a-\phi_b=-\int_b^a\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int_a^b\vec{E}\cdot\vec{ds}$$

ermitteln. Falls statt der elektrischen Verschiebung D das Potenzial φ bekannt ist, kann man die Feldstärke auch hier über

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi=-\left[\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]$$

bestimmen. Die auf die Elektroden ladbare Ladungsmenge Q hängt außer von der angelegten Spannung U auch von den Abmessungen und vom Dielektrikum ab. Man erhält einen proportionalen Zusammenhang zwischen Q und U, der durch die Kapazität C gegeben ist und die Kondensatorwirkung der Anordnung beschreibt:

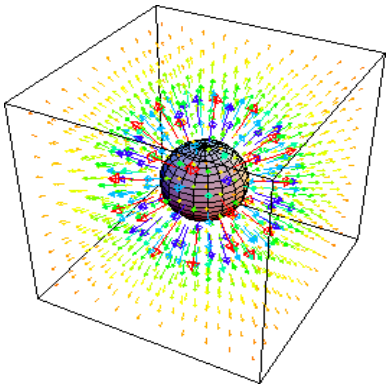
$$Q = C \cdot U \quad \text{oder} \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{\int_{(A)} D\,dA}{\int_a^b E\,ds} \quad \left[\frac{As}{V} = \text{Farad}\right]$$

Die Kapazität lässt sich formal mit dem elektrischen Leitwert G in Strömungsfeldern vergleichen. ***Aber Vorsicht*** mit solchen Analogien: Sie nehmen in den entsprechenden Formeln zwar den gleichen Platz ein, jedoch sind die physikalischen Wirkungen im Allgemeinen sehr verschieden.

Falls die Elektroden aus zwei gleichen Metallplatten der Fläche A bestehen, die sich im Abstand von d gegenüberstehen und deren Zwischenraum mit einem Stoff der Dielektrizitätskonstanten ε ausgefüllt ist, dann entsteht zwischen den Platten ein homogenes, konstantes elektrisches Feld E = const. Die Kapazität wird damit

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\int_{(A)} D\,dA}{\int_a^b E\,ds} = \frac{\epsilon \cdot E \int_{(A)} dA}{E \int_a^b ds} = \frac{\epsilon \cdot A}{d} \quad .$$

Die Kapazitätsberechnung bei inhomogenen Felder erfolgt ganz ähnlich wie die Widerstandsbestimmung in Strömungsfeldern. Ein **Kugelkondensator** besteht z. B. aus zwei konzentrisch angeordneten, gut leitenden Kugelschalen, die an eine Spannungsquelle angeschlossen und mit einem isolierenden Material der Dielektrizitätskonstanten ε gefüllt sind.



Das obenstehehde Bild zeigt die innere Kugelelektrode mit dem Radius R_i und das elektrostatische Feld $\vec{E}$ bzw. $\vec{D}$, welches aus Symmetriegründen radial zur hier nicht dargestellten äußeren Kugelelektrode mit dem Radius R_a gerichtet ist. Der Betrag D der Verschiebungsdichte berechnet sich aus der auf den Elektroden durch die Spannung U aufgebrachten Ladung Q als

$$D = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Die Spannung U zwischen innerer und äußerer Elektrode erhält man mit

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

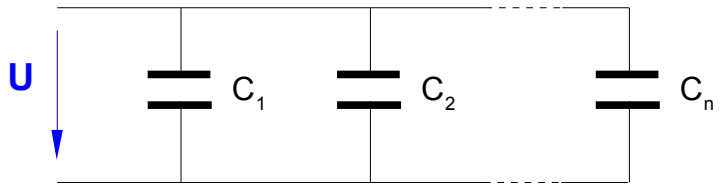
und bei Berücksichtigung der Parallelität der Vektoren $\vec{E}$ bzw. $\vec{D}$ und $\vec{ds}$ wieder aus

$$U_{ia}=\phi_a-\phi_b=-\int_{R_a}^{R_i}\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int_{R_i}^{R_a}\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int_{R_i}^{R_a}\frac{D}{\epsilon}ds=\frac{Q}{\epsilon\cdot 4\cdot\pi}\cdot\int_{R_i}^{R_a}\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q}{\epsilon\cdot 4\cdot\pi}\left[\frac{1}{R_i}-\frac{1}{R_a}\right]$$

Da die Kapazität C den Quotienten aus Q und U darstellt, ist C hier

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\epsilon\cdot 4\cdot\pi}{\frac{1}{R_i}-\frac{1}{R_a}}\quad\left[\frac{As}{V}\right]\quad .$$

Der Zusammenhang zwischen der Ladung Q, der Kondensatorspannung U und der Kapazität C gestattet auch je eine Aussage zur Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren. Bei der **Parallelschaltung**

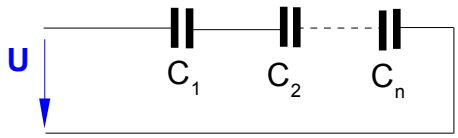


ist die Spannung U an allen Kondensatoren gleich groß und die Gesamtladung Q ist die Summe aller Einzelladungen:

$$Q=C_1\cdot U+C_2\cdot U+\ \ldots\ +C_n\cdot U=(C_1+C_2+\ \ldots\ +C_n)\cdot U$$

$$C=C_1+C_2+\ \ldots\ C_n\quad .$$

Die Gesamtkapazität berechnet sich also wie der Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung. Für die **Reihenschaltung** von Kondensatoren gilt, dass die Gesamtladung Q an allen Kondensatoren gleich sein muss.



In Verbindung mit dem KMG ist

$$U=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}+\ \ldots\ +\frac{Q}{C_n}=Q\cdot\left[\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ \ldots\ +\frac{1}{C_n}\right]=Q\cdot\frac{1}{C}\quad\text{oder}$$

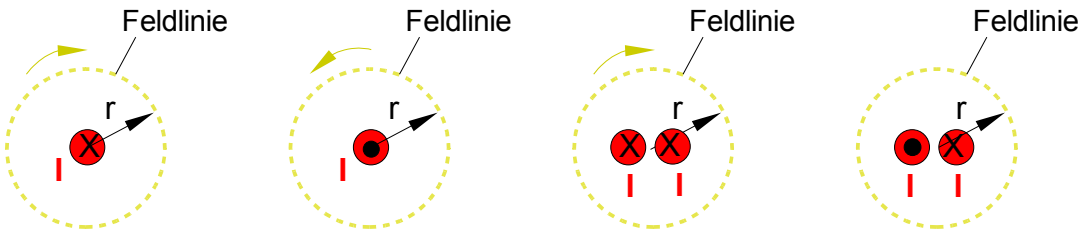
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ \ldots\ +\frac{1}{C_n}\quad .$$

Die Reihenschaltung von Kapazitäten entspricht also der Parallelschaltung von Widerständen.

4 Magnetische Felder

Die Wirkung von Magnetfeldern ist den Allermeisten von Dauermagneten bekannt. Doch auch stromdurchflossene Leiter zeigen die damit zusammenhängenden Erscheinungen (z. B. Kräfte). Ein Strom I

erzeugt dabei ein um den Leiter konzentrisches Magnetfeld $\vec{H}$, welches in der Einheit A/m gemessen wird.



Im linken Bild fließt der Strom I in die Zeichenebene hinein, die magnetische Feldstärke hat einen tangentialen Verlauf im Uhrzeigersinn (**„rechte Hand-Regel“**). Im zweiten Bild fließt er aus der Zeichenebene heraus, hier hat $\vec{H}$ einen tangentialen Verlauf im Gegenuhrzeigersinn. Das dritte Bild zeigt eine Anordnung, in der wegen des doppleten Stromes die Feldstärke doppelt so groß ist. Im vierten Bild schließlich heben sich die Wirkungen der entgegen gesetzten Ströme gerade auf, weshalb hier kein Feld herrscht.

Allgemein besteht ähnlich wie beim elektrischen Feld folgender integraler Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke und dem Strom:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{s} = I \quad [A]$$

Im Gegensatz zum elektrischen Feld macht der Integrationsweg hier einen geschlossenen Umlauf. Wenn wie in den obigen Bildern die Feldstärke aus Symmetriegründen bei festem Radius r konstant ist, und der Vektor $d\vec{s}$ des Wegelementes parallel zu $\vec{H}$ verläuft, kann der Betrag von H vor das geschlossene Linienintegral gezogen werden und man erhält einen Ausdruck, aus dem sich die magnetische Feldstärke berechnen lässt:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{s} = H \cdot \oint ds = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = I \quad [A]$$

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad \left[\frac{A}{m}\right]$$

oder für mehrere Leiter N innerhalb des Integrationsweges (Vorzeichen der Stromrichtung beachten):

$$\oint \vec{H}\,d\vec{s} = H \cdot \oint ds = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = N I = \Theta \quad [A]$$

Die Größe Θ heißt **magnetische Durchflutung**. Eine weitere Kenngröße ist die **magnetische Flussdichte** $\vec{B}$ $\left[\frac{VS}{m^2}\right]$. Sie steht mit $\vec{H}$ über die Materialgleichung

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad \left[\frac{VS}{m^2}\right]$$

in Zusammenhang und hat als Vektor die gleiche Richtung. μ ist die magnetische Permeabilität und besteht aus der magnetischen Feldkonstanten μ_0 und der relativen Permeabilität μ_r:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{V \cdot s}{A \cdot m}\right] = 1.257 \cdot 10^{-6} \left[\frac{V \cdot s}{A \cdot m}\right],$$

die relative Permeabilität μ_r ist eine dimensionslose Zahl und für die meisten Materialien eine Konstante, außer für ferromagnetische Stoffe. Hier hängt μ_r von der Feldstärke ab. Einige Werte :

Material	μ_r	Bezeichnung
Vakuum	1	Referenzwert
Wasser	0,99999100	diamagnetisch
Kupfer	0,99999000	diamagnetisch
Luft	1,00000030	paramagnetisch
Platin	1,00021000	paramagnetisch
Gußeisen	500 7000	ferromagnetisch
Reinsteisen	25000 250000	ferromagnetisch

Der magnetische Fluss ist das Flächenintegral über die magnetische Flussdichte:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} \quad [\mathrm{V\,s}]$$

5 Netzwerkrechnung für langsam veränderliche Wechselspannungen und Wechselströme

5.1 Energieinhalte von Kondensatoren und Induktivitäten

Die bisher behandelte Netzwerkrechnung beschränkte sich auf die Bestimmung von Strömen und Spannungen

- in einer Anordnung aus rein ohmschen Widerständen
- bei Speisung mit Quellen konstanter eingeprägter (Gleich-) Spannungen und/oder Strömen
- im stationären (= eingeschwungenen) Zustand.

Es wurde also angenommen, dass nach dem Einschalten der Spannungs- und/ oder Stromquellen einige Zeit vergangen war – was auch immer das heißt. Jedenfalls sollte die Zeit so ausreichend gewesen sein, dass keine zeitlichen Veränderungen bei den beteiligten Spannungen und Strömen mehr festzustellen waren.

Da es streng genommen keine Netzwerke mit nur ohmschen Widerständen gibt (z. B. weisen bereits Zu- und Verbindungsleitungen neben dem ohmschen Anteil auch ein kapazitives und induktives Verhalten auf), sind bei allen Schaltvorgängen zeitliche Übergänge zu beobachten, die auf der physikalischen Eigenschaft von Induktivitäten und Kapazitäten als Energiespeicher beruhen:

$$W_C = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \qquad W_L = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Weder kann sich die elektrische Energie eines Kondensators noch die elektrische Energie einer Spule unstetig (= sprunghaft) ändern, da hierfür unendliche große Leistungen benötigt würden. Es vergeht also stets eine endliche Zeitspanne, um neue Energiezustände zu erreichen. Anders ausgedrückt ändern sich **Spannungen an Kondensatoren** und **Ströme durch Spulen** nur stetig.

5.2 Differenzielle Zusammenhänge zwischen Strömen und Spannungen

Man beobachtet dies zum Beispiel

- beim Zuschalten eines ungeladenen Kondensators großer Kapazität in ein Netzwerk daran, dass wegen des faktisch vorhandenen Kurzschlusses die dann fließenden hohen Aufladungsströme die Sicherungen auslösen könnten
- beim Abschalten einer stromdurchflossenen Spule über die Spannungsüberschlag-Funken an den Schalterkontakten, da der Strom durch die Spule im ersten Augenblick noch in unverminderter Höhe durch den erzwungenen Lichtbogen weiterfließen muss.

Beide Erscheinungen sind für den Betrieb einer elektrischen Anordnung schon deshalb zu berücksichtigen, damit keine unerwünschten **Gefährdungen des Betriebspersonals**, **Betriebsunterbrechungen** oder **Anlagenbeschädigungen** (Abnutzung von Kontakten) passieren.

Andererseits bedeutet dies wegen des differenziellen Zusammenhangs zwischen dem Strom durch einen Kondensator und der zeitlichen Änderung der Kondensatorspannung

$$i_c = C \cdot \frac{du_c}{dt}$$ („Ohmsches Gesetz“ für Kapazitäten)

bzw. zwischen der Spannung an einer Spule und der zeitlichen Änderungen des Spulenstromes

$$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$ („Ohmsches Gesetz“ für Induktivitäten),

auch, dass der Kondensatorstrom bzw. die Spulenspannung unstetig verlaufen können (sie sind keine Energie-Zustandsgrößen).

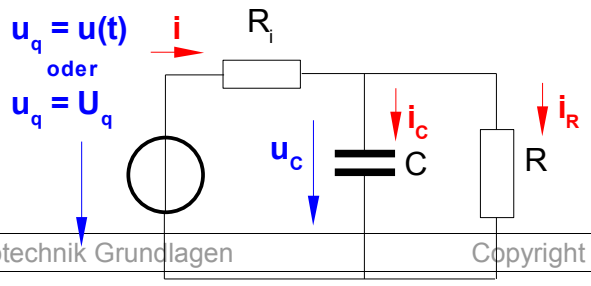
Die Frage ist nun, wie unter Berücksichtigung dieser physikalischen Gesetze die zeitlichen Verlauf von Strömen und Spannungen in einem Netzwerk berechnet werden können. Dabei sind aus technischer Sicht die beiden Fälle

- **Ein-** oder **Ausschaltmaßnahmen** in einem Netzwerk
- Betrieb eines Netzwerks mit **sinusförmigen Quellenspannungen**- und/oder **Strömen**

von besonderem Interesse.

5.3 Netzwerkberechnung für den allgemeinen Fall, Aufstellen und Lösen der Differenzialgleichungen

Zunächst wird an einem Beispiel der allgemeine Ansatz erläutert, der weiterhin die beiden Kirchhoff-Gesetze nutzt. Es handelt sich um eine realen Spannungsquelle, welche die Parallelschaltung eines Kondensators mit einem Widerstand (z. B. dem endlichen Isolationswiderstand zwischen den Kondensatorplatten) speist.



Die 3 unbekannten Ströme können prinzipiell mit Hilfe der Knotengleichung

$$i - i_c - i_R = 0 \qquad \text{(I)}$$

und der beiden Maschengleichungen

$$u_q - R_i \cdot i - u_c = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$u_c - R \cdot i_R = 0 \qquad \text{(III)}$$

berechnet werden. Ersetzt man den Strom i_C durch die Kondensatorspannung u_C, so liefert (II)

oder mit $T_1 = \frac{R_i \cdot R}{R_i + R} \cdot C$ und umgeordnet

$$T_1 \frac{du_C}{dt} + u_C = \frac{R}{R_i + R} \cdot u_q \qquad \text{(IV).}$$

Dies ist eine **lineare Differenzialgleichung erster Ordnung**, entsprechend dem in der Schaltung enthaltenen Kondensator als Energiespeicher. Im Allgemeinen bringt jede unabhängige Kapazität und Induktivität eine weitere Ableitung in die Differenzialgleichung ein. So ergibt sich für ein Netzwerk mit einem Kondensator und einer Spule eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung (= mit einer zweiten Ableitung), siehe Beispiel weiter unten.
Mit (IV) sind die physikalischen Zusammenhänge im Netzwerk vollständig und allgemein beschrieben. Die weitere Aufgabe besteht nun in der mathematischen Lösung. Sie läuft immer in den drei folgenden Schritten ab:

Schritt a: Aufstellen eines allgemeinen Lösungsansatzes

$$u_C = u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{C\infty}(t) \qquad \text{(a)}$$

Darin ist $u_{Ch}(t)$ der **homogene Lösungsanteil**, $u_{C\infty}$ die **stationäre Lösung**. Der homogene Lösungsanteil sorgt für einen physikalisch verträglichen Übergang vom Anfangszustand der Energiespeicher zum Zeitpunkt t = 0 in den stationären Endzustand, er stellt sicher, dass die Stetigkeit der Energieinhalte gewahrt bleibt. Man erhält die homogene Lösung, in dem man den rechten Teil der DGL (IV) auf Null setzt:

$$T_1 \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \qquad \text{(V)}$$

Ein Lösungsansatz für $u_{ch}(t)$, der diese DGL unabhängig von allen Koeffizienten immer erfüllt, enthält die Exponentialfunktion e^{at}, da diese sich nach dem Differenzieren wieder selbst enthält und somit in jedem Term auftritt. Wählt man also

$u_{ch}(t) = K \cdot e^{a \cdot t}$, so ergibt sich

$$T_1 \cdot a \cdot K \cdot e^{a \cdot t} + K \cdot e^{a \cdot t} = 0 \qquad \text{(VI).}$$

K und e^{at} sind von 0 verschieden, weshalb sie aus (VI) gekürzt werden dürfen:

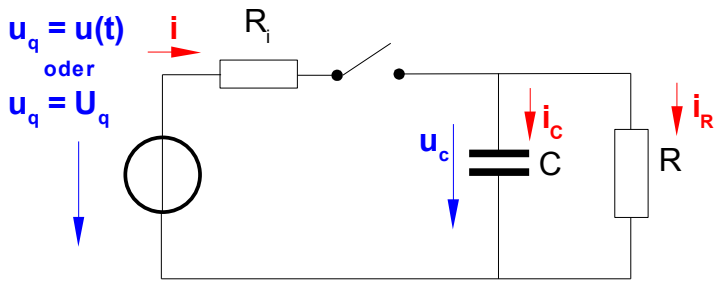
$$T_1 \cdot a + 1 = 0 \quad \text{oder}$$

$$a = -\frac{1}{T_1} \quad .$$

Damit ist die homogene Lösung festgelegt:

$$u_{Ch} = K \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \qquad \text{(VII).}$$

Mit der Konstanten K können die Anfangszustände in der Lösung berücksichtigt werden. Ist für t < 0 der Schalter geöffnet und der Kondensator auf $u_C = u_C(0)$ aufgeladen



und wird der Schalter bei t=0 geschlossen, so lässt sich diese Anfangsbedingung mit Hilfe von K im Lösungsansatz (a) berücksichtigen.

Für die stationäre Lösung muss aus physikalischen Gründen gelten, dass sie an den Verlauf der Zeitfunktion auf der rechten Seite angepasst ist. Aus den unendlich vielen Möglichkeiten für u(t) treten technisch die beiden Fälle

$u_q = U_q = \text{const.}$ → Gleichspannung (oder Gleichstrom)
$u_q = \hat{u}_q \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$ → sinusförmige Wechselspannung mit der Frequenz f

besonders häufig auf. Wenn $u_q = U$ eine Gleichspannung ist, also keine Zeitabhängigkeit besteht, muss die stationäre Lösung ebenfalls zeitunabhängig sein. Der allgemeine Ansatz (a) mit

$$u_{Ch}(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + u_{c\infty}$$

ergibt mit (IV)

$$-\frac{1}{T_1} \cdot K \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + u_{c\infty} = \frac{R}{R_i + R} \cdot u_q = \frac{R}{R_i + R} \cdot U_q$$

oder für $t \to \infty$

$$u_{c\infty}=\frac{R}{R_i+R}\cdot u_q=\frac{R}{R_i+R}\cdot U_q \qquad \text{(VIII).}$$

Für Gleichspannungsquellen ist diese Lösung identisch mit der aus der Netzwerkrechnung. Ideale Kapazitäten werden dabei durch unendlich hohe Widerstände, ideale Induktivitäten durch Kurzschlüsse ersetzt. Der allgemeine Ansatz (a) geht mit (VII) und VIII) zunächst in

$$u_c(t)=K\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{R}{R_i+R}\cdot U_q \quad \text{über.}$$

Mit der Anfangsbedingung $u_C = u_C(0)$ ist schließlich auch K festgelegt:

$$K=-\frac{R}{R_i+R}\cdot U_q \quad \text{und die allgemeine Lösung wird zu}$$

$$u_c(t)=\frac{R}{R_i+R}\cdot U_q\left(1-e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \quad .$$

Für die folgende Überlegung soll die Spannung der Quelle nun einen sinusförmigen Verlauf haben, liefert also eine Wechselspannung mit der Frequenz f :

$$u_q=\hat{u}_q\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi) \qquad \text{(IX).}$$

5.4 Netzwerkberechnung für den eingeschwungenen Fall sinusförmiger Wechselgrößen

Der Lösungsansatz (a) bleibt bestehen, auch die homogene Lösung (VII) ändert sich nicht. Dagegen muss die stationäre Lösung nach Abklingen aller Ausgleichsvorgänge ($t \to \infty$) ebenfalls einen sinusförmigen Verlauf annehmen, wenn auch im Allgemeinen mit anderer Amplitude und anderem Phasenwinkel:

$$u_{C\infty}=\hat{u}_C\sin(\omega\cdot t+\phi_C) \qquad \text{(X).}$$

Amplitude $\hat{u}_C$ und Phasenwinkel Φ_C müssen jetzt bestimmt werden. Dazu setzt man (X) in (IV) ein:

$$T_1\cdot\left[-\frac{1}{T_1}\cdot K\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+\hat{u}_c\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\phi_C)\right]+K\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+\hat{u}_C\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi_C)=\frac{R}{R_i+R}\cdot\hat{u}_q\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi) \quad .$$

Für $t \to \infty$ verschwinden die beiden Terme mit der e-Funktion und es bleibt

$$T_1\cdot\hat{u}_c\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\phi_C)+\hat{u}_C\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi_C)=\frac{R}{R_i+R}\cdot\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi) \quad .$$

Linke und rechte Seite müssen gleich sein, daher wird die linke Seite umgeformt. Über das Gleichsetzen von Amplituden und Phasenwinkel lassen sich $\hat{u}_C$ und Φ_C ermitteln. Auf beiden Seiten können mit Hilfe der trigonometrischen Umformungen

$$\cos(\omega\cdot t+\phi_C)=\cos(\omega\cdot t)\cdot\cos(\phi_C)-\sin(\omega\cdot t)\cdot\sin(\phi_C)$$

$$\sin(\omega\cdot t+\phi_C)=\sin(\omega\cdot t)\cdot\sin(\phi_C)+\cos(\omega\cdot t)\cdot\sin(\phi_C)$$

$$\sin(\omega\cdot t+\phi)=\sin(\omega\cdot t)\cdot\sin(\phi)+\cos(\omega\cdot t)\cdot\sin(\phi)$$

zusammengehörige Terme zugeordnet werden. Man erhält für die Koeffizienten bei $\sin(\omega\cdot t)$

$$\frac{R}{R_i+R}\cdot\hat{u}\cdot\cos\phi=\hat{u}_c\left[\cos\phi_C-T_1\cdot\omega\cdot\sin\phi_C\right] \qquad \text{(XI)}$$

und für die bei $\cos(\omega\cdot t)$

$$\frac{R}{R_i+R}\cdot\hat{u}\cdot\sin\phi=\hat{u}_c\left[\sin\phi_C+T_1\cdot\omega\cdot\cos\phi_C\right] \qquad \text{(XII).}$$

(XII) durch (XI) geteilt ergibt

$$\mathrm{tg}\,\phi=\hat{u}_c\frac{\sin\phi_C+T_1\cdot\omega\cdot\cos\phi_C}{\cos\phi_C-T_1\cdot\omega\cdot\sin\phi_C} \quad \text{und daraus}$$

$$\mathrm{tg}\,\phi_C=\frac{\mathrm{tg}\,\phi-T_1\cdot\omega}{T_1\cdot\omega\cdot\mathrm{tg}\,\phi+1} \quad \text{oder}$$

$$\phi_C=\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,\phi-T_1\cdot\omega}{T_1\cdot\omega\cdot\mathrm{tg}\,\phi+1}=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\phi)-\mathrm{arctg}(T_1\cdot\omega)=\phi-\mathrm{arctg}(T_1\cdot\omega) \quad .$$

Der relative Phasenwinkel zwischen der Quellenspannung $u_q(t)$ und der stationären Kondensatorspannung beträgt also

$$\phi_C-\phi=-\mathrm{arctg}(T_1\cdot\omega) \qquad \text{(XIII).}$$

Die Amplitude ergibt sich auf ähnlichem Wege als

$$\hat{u}_c=\frac{R}{R+R_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(T_1\omega)^2}} \qquad \text{(XIV).}$$

Sowohl der Phasenwinkel als auch die Amplitude der Wechselspannung am Kondensator hängen im stationären Zustand nur von der Frequenz und den Bauteildimensionierungen ab. Man muss also nicht die Differenzialgleichung lösen, sondern kann beide Parameter direkt bestimmen.

5.5 Vereinfachung der Netzwerkberechnung mit Hilfe komplexer Zeigergrößen

Allerdings wird selbst bei der verwendeten einfachen Anordnung die Lösung über die DGL bereits sehr aufwändig. Man kommt wesentlich schneller zum Ergebnis, wenn man sich der – leider etwas abstrakten – komplexen Rechnung bedient. Dazu verwendet man für die trigonometrischen Ausdrücke die Eulerformeln

$$u_q(t)=\hat{u}\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi)=\hat{u}\cdot\frac{e^{j(\omega\cdot t+\phi)}-e^{-j(\omega\cdot t+\phi)}}{2j} \qquad \text{(XV) und}$$

$$u_{C\infty}(t)=\hat{u}_c\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi_C)=\hat{u}_C\cdot\frac{e^{j(\omega\cdot t+\phi_C)}-e^{-j(\omega\cdot t+\phi_C)}}{2j} \qquad \text{(XVI)}$$

und setzt diese in die DGL (V) ein. Die homogenen Lösungsanteile kann man gleich weglassen, da die entsprechenden Terme ohnehin verschwinden, wie bereits zu sehen war. Man erhält links und rechts konjugiert komplexe Ausdrücke mit zeitabhängigen und zeitunabhängigen Anteilen, für (XV) z. B.

$$u_q(t)=\frac{\hat{u}\cdot e^{j(\omega\cdot t+\phi)}+\hat{u}\cdot e^{-j(\omega\cdot t+\phi)}}{2j}=\frac{\sqrt{2}}{2j}\cdot U_{eff}\cdot e^{j\omega\cdot t}\cdot e^{j\cdot\phi}-\frac{\sqrt{2}}{2j}\cdot U_{eff}\cdot e^{-j\omega\cdot t}\cdot e^{-j\cdot\phi}=z-\bar{z}$$

Damit sind folgende wesentlichen Vereinfachungen möglich:

- Für die weitere Rechnung kann der konjugiert komplexe Teil $\bar{z}$ weggelassen werden, da in diesem keine zusätzliche Information steckt.
- Der Faktor $\frac{\sqrt{2}}{2j}$ ist in allen Termen enthalten und kann ebenfalls weggelassen werden
- Da alle Terme die gleiche zeitabhängige Eulerform $e^{j(\omega\cdot t)}$ enthalten, lässt sich diese heraus kürzen.
- Es bleiben links und rechts nur **zeitunabhängige** komplexe Ausdrücke übrig, z. B. von (XV)

  $\underline{U}_q=U_{eff}\cdot e^{j\cdot\phi}$ und man erhält mit $\underline{U}_C=\frac{R}{R+R_i}\cdot\frac{1}{1+j\omega T_1}\cdot\underline{U}_q$ (XVII) die einfache komplexe Form der gesuchten stationären Lösung. Die Größen $\underline{U}_q$ und $\underline{U}_C$ bezeichnet man als **komplexe Zeiger**. Sie „drehen“ sich alle zusammen mit dem Winkel ω t in der komplexen Ebene.
- Wenn wieder die vollständigen trigonometrischen Ausdrücke benötigt werden (was selten der Fall ist), lassen sich diese durch die rückwärtigen Schritte erzeugen.

Aus (XVII) können Betrag und Phasenwinkel ermittelt werden und man erhält dieselben Ergebnisse wie bei (XIII) und (XIV).

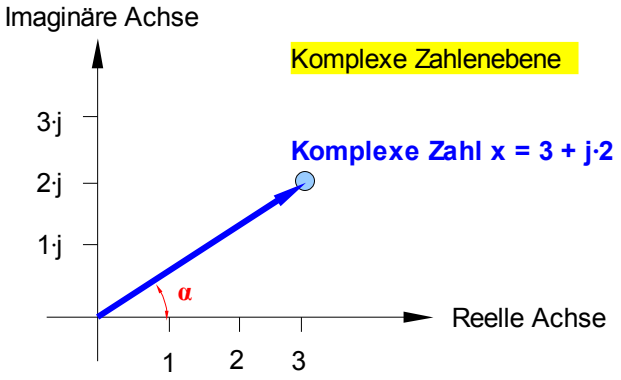
5.6 Rechnen mit komplexen Zeigergrößen

Im normalen Alltag rechnet man mit den gewohnten reellen Zahlen a für $a\in R$. Wendet man Funktionen auf reelle Zahlen an, so ergeben sich wiederum reelle Zahlen. Einige Funktionen gestatten dabei nur definierte Wertebereiche für a, so z. B. die Wurzelfunktion $b=\sqrt{a}$, die lediglich für $a\geq 0$ gilt (selbst allerdings positiv und negativ ist). Insbesondere gibt es für $j=\sqrt{-1}$ keine Lösung im Bereich der reellen Zahlen.

Da sich mit $j=\sqrt{-1}$ aber für viele Aufgaben sinnvolle Lösungen bestimmen lassen würden, haben die Mathematiker den Ausdruck $\sqrt{-1}$ für zulässig erklärt und ihm die imaginäre **Einheit j** zugeordnet. Obwohl man zu dieser Einheit keine Bedeutung in der realen Welt findet, lassen sich bei entsprechenden Aufbau eines erweiterten Zahlensystems damit Rechnungen für Aufgaben aus der realen Welt wesentlich vereinfachen oder überhaupt erst ermöglichen. Die imaginäre Einheit hat folgende Eigenschaften:

$$j^2 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$
$$j^3 = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2\cdot\sqrt{-1} = -1\cdot j = -j$$
$$j^4 = \left(\sqrt{-1}\right)^2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)\cdot(-1) = +1$$

Das mit den reellen Zahlen und „j“ aufbaubare erweiterte System ist das der **komplexen Zahlen** und kann mit Hilfe eines Koordinatensystems, der **komplexen Zahlenebene**, dargestellt werden.



Jeder Punkt in der komplexen Zahlenebene ist also einer komplexen Zahl zugeordnet und besteht aus den „Koordinaten“ Realteil (Re) und Imaginärteil (Im). Allgemein schreibt man komplexe Zahlen in 3 gleichwertigen Formen, wobei jede für die definierten Operationen Vor- und Nachteile aufweist, so dass man die jeweils günstigere Darstellung frei wählen und in eine der anderen umrechnen kann:

$$x = a + j\cdot b = |x|\cdot(\cos\alpha + j\cdot\sin\alpha) = |x|\cdot e^{j\cdot\alpha}$$

mit

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{(Pythagoras)}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \qquad \text{(arctg = arcustangens = Umkehrfunktion zum tangens)}$$

Zu jeder komplexen Zahl x gibt es eine **konjugiert komplexe Zahl** $\bar{x} = a - j\cdot b$, deren Imaginärteil den dazu negativen Wert aufweist. In der komplexen Ebene liegt sie spiegelbildlich zu reellen Achse.

Die oben gezeigten Formen heißen

$x = |x|\cdot(\cos\alpha + j\cdot\sin\alpha)$ = Moivrische Form oder Polarform

$x = |x|\cdot e^{j\cdot\alpha}$ = Euler-Form, $e^{j\cdot\alpha}$ ist die Exponentialfunktion.

Hinweis: Es besteht folgender bemerkenswerter Zusammenhang $e^{j\cdot\pi} = -1$.

Mit $y = c + j\cdot d$ können die Grundoperationen ausgeführt werden:

Addition und Subtraktion:

$$x+y=(a+c) + j\cdot(b+d) \quad \text{und} \quad x-y=(a-c) + j\cdot(b-d)$$

Multiplikation:

$$x \cdot y = (a \cdot c - b \cdot d) \cdot j \cdot (a \cdot d + b \cdot c)$$

Die Multiplikation einer komplexen Zahl x mit ihrer konjugiert komplexen Zahl $\bar{x}$ ergibt eine reelle Zahl:

$$x \cdot \bar{x} = (a + j \cdot b) \cdot (a - j \cdot b) = a^2 + b^2$$

Division:

Hierfür ist es nützlich, Zähler und Nenner mit dem konjugiert komplexen Nenner zu erweitern, da dann im Nenner eine rein reelle Zahl entsteht:

$$\frac{x}{y} = \frac{a + j \cdot b}{c + j \cdot d} = \frac{a + j \cdot b}{c + j \cdot d} \cdot \frac{c - j \cdot d}{c - j \cdot d} = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} + j \cdot \frac{-a \cdot d + b \cdot c}{c^2 + d^2}$$

Mit der Euler-Form können Multiplikation und Division wesentlich vereinfacht werden, sind zuvor aber erst umzuwandeln:

$$x = a + j \cdot b = |x| \cdot e^{j \cdot \alpha} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j \cdot \alpha}$$
$$y = c + j \cdot d = |y| \cdot e^{j \cdot \beta} = \sqrt{c^2 + d^2} \cdot e^{j \cdot \beta} \quad .$$

Damit werden Multiplikation und Division:

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cdot e^{j \cdot (\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = \frac{|x|}{|y|} \cdot e^{j \cdot (\alpha - \beta)} \quad .$$

Mit diesen Hilfsmitteln kann man nun die komplexe Wechselstromrechnung durchführen.

5.7 Beispiele zur komplexen Wechselstromrechnung

Wie in Kapitel 5.5 dargestellt wurde, lassen sich die ohmschen, kapazitiven und induktiven Widerstände für den stationären Fall der Speisung eines Netzwerks mit sinusförmigen Spannungen und/oder Strömen durch komplexe Ausdrücke angeben (die aus den differenziellen Zusammenhängen zwischen Spannungen und Strömen bei Kondensatoren und „Spulen“ gemäß Kapitel 5.2 folgen):

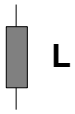
- Ohmsche Widerstände R bleiben unverändert, sind also rein reelle Größen:

komplexe Darstellung: $R \; [\text{Ohm}]$

- Kondensatoren mit der Kapazität C (in $\text{Farad} = \frac{A \cdot s}{V}$) erhalten einen komplexen Widerstand:

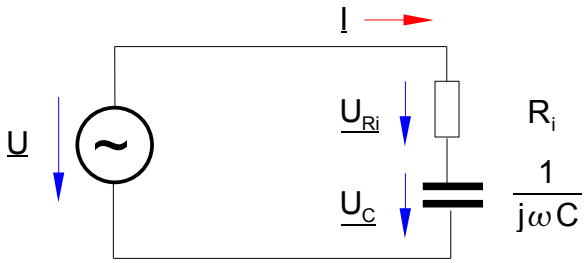
komplexe Darstellung: $\frac{1}{j \omega C} = -\frac{j}{\omega C} \; [\text{Ohm}]$

- „Spulen“ mit der Induktivität L (in $\text{Henry} = \frac{V \cdot s}{A}$) erhalten einen komplexen Widerstand:



komplexe Darstellung: $j\omega L \; [\text{Ohm}]$.

Für die Berechnung der komplexen Spannungen $\underline{U}$ und Ströme $\underline{I}$ in einem Netzwerk werden dieselben Gesetze und Regeln wie bei Gleichstromnetzen angewendet. Die dabei ermittelten Ergebnisse bestehen aus den Effektivwerten und Phasenwinkeln. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann eine der Quellengrößen willkürlich den Phasenwinkel 0 erhalten, so dass der zugehörige Zeiger auf der reellen Achse liegt. Am folgenden Beispiel lässt sich dies erläutern.



Hierbei ist die Kreisfrequenz als

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = 2\cdot\pi\cdot f$$

definiert. Der komplexe Widerstand der Reihenschaltung aus R_i und C ist:

$$Z(j\omega) = R_i + \frac{1}{j\omega C} = R_i - j\cdot\frac{1}{\omega C}$$

$$= \sqrt{R_i^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{j\cdot \operatorname{arctg}\left(-\frac{\frac{1}{\omega C}}{R_i}\right)} = \sqrt{R_i^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{-j\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_i C}\right)}$$

Diesen Ausdruck kann man gemäß Kapitel 5.6 als Real- und Imaginärteil oder in der Euler-Form mit Betrag und Phasenwinkel darstellen. Für den Phasenwinkel gilt:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\text{Imaginärteil}(\underline{Z})}{\text{Realteil}(\underline{Z})}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R_i}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_i C}\right)$$

Bei einer Frequenz f = 50 Hz der Haushalts-Wechselspannung erhält man für die Bauteilwerte

$$R_i = 100 \text{ Ohm}$$
$$C = 10 \; \mu F = 10\cdot 10^{-6} \text{ Farad} = 10^{-5} \text{ Farad}$$

den komplexen Widerstand

$$Z(j\omega) = 333{,}8 \cdot e^{-j\cdot 72{,}57^\circ} \; [\text{Ohm}] \; .$$

Für den Strom gilt nach dem Ohmschen Gesetz:

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{Z(j\omega)}=\frac{\underline{U}}{R_i+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{\underline{U}}{\sqrt{R_i^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{-j\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_i C}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{R_i^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{+j\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_i C}\right)}\cdot\underline{U}$$

Der Strom ist also bezogen auf die Spannung um einen positiven Winkel gedreht, er „eilt“ der Spannung voraus. Dabei ist folgende Operation zu beachten:

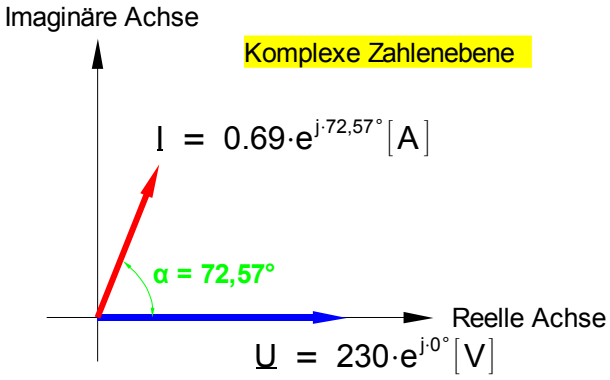
$$\frac{1}{e^{-j\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_i C}\right)}}=e^{+j\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_i C}\right)}$$

Hinweis: In der Blockveranstaltung am 01.11.2008 wurde der Phasenwinkel versehentlich als negativ ermittelt.

Mit der Haushalts-Wechselspannung 230 Volt (diese Zahlenangabe stellt den **Effektivwert** dar, aus dem sich die **Amplitude** $\hat{u}=U_{eff}\cdot\sqrt{2}=325$ Volt ergibt) wird

$$\underline{I}=\frac{1}{333{,}8}\cdot e^{j\cdot 72{,}57^\circ}\cdot 230=0{,}69\cdot e^{j\cdot 72{,}57^\circ}[A]\ .$$

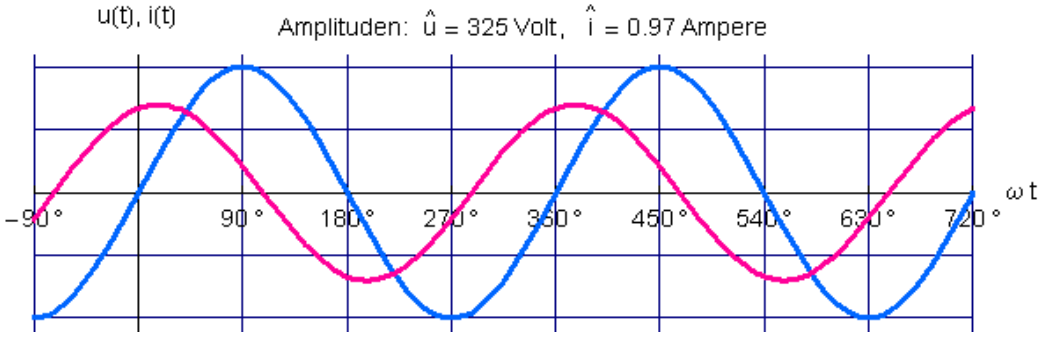
In einem Diagramm lassen sich Spannungs – und Stromzeiger so darstellen:



Der physikalischer Verlauf von Spannung u(t) und Strom i(t) ist sinusförmig, die Amplituden ergeben sich aus den Effektivwerten als

$$\hat{u}=230\cdot\sqrt{2}=325\ \text{Volt}$$
$$\hat{i}=0{,}69\cdot\sqrt{2}=0.97\ \text{A}\ ,$$

der Sinusverlauf des Stromes i(t) ist gegenüber u(t) um den Phasenwinkel 72,57° **vor**verschoben.



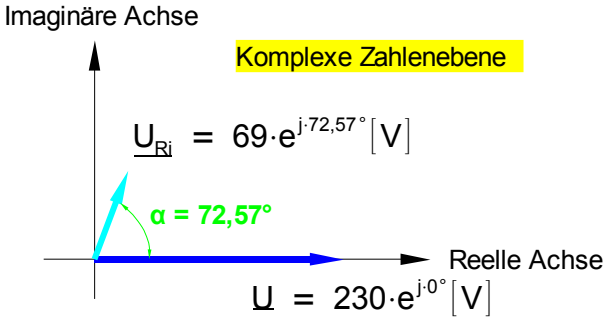
In ähnlicher Weise wird die Spannung am Widerstand R_i ermittelt. Die Spannungsteilerregel ergibt:

$$\underline{U}_{Ri} = \frac{R_i}{R_i + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{U} = \frac{R_i}{\sqrt{R_i^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{+j \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\omega R_i C}\right)} \cdot \underline{U} \quad .$$

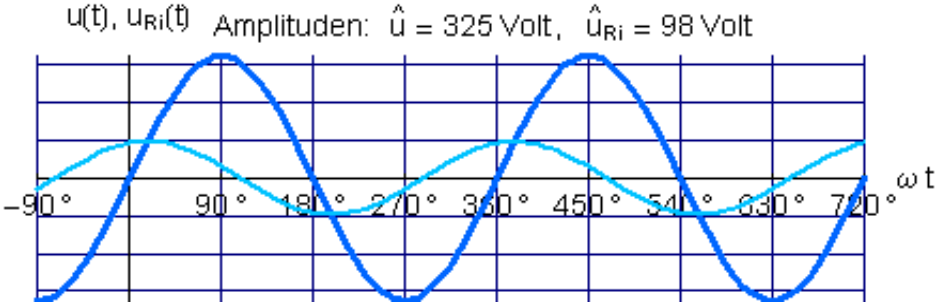
Mit den Zahlenwerte erhält man

$$\underline{U}_{Ri} = 69 \cdot e^{j \cdot 72{,}57^\circ} \text{ Volt} \quad .$$

Das Zeigerdiagramm ist hier:



Den zeitlichen Verlauf zeigt das folgende Bild:



Über die Spannungsteilerregel kann schließlich auch die Kondensatorspannung berechnet werden:

$$\underline{U}_C = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_i + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{U} = \frac{1}{\omega C \cdot \sqrt{R_i^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{+j \cdot \mathrm{arctg}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\omega R_i C}\right)} \cdot \underline{U} \quad .$$

Der Phasenwinkel ergibt sich nach den Rechenregeln für komplexe Zahlen hier am einfachsten als

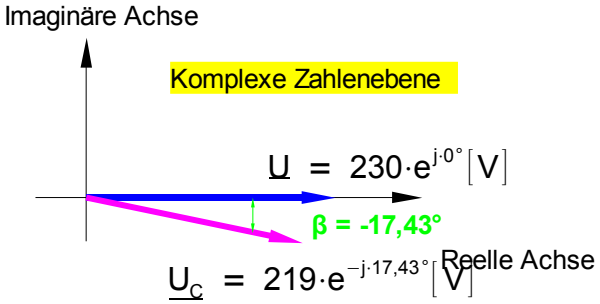
$$\beta = \text{Phasenwinkel des Zählers} - \text{Phasenwinkel des Nenners}$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{0}\right) - \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\omega R_i C}\right) = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\left(+\frac{1}{\omega R_i C}\right) = -90° + \mathrm{arctg}\left(+\frac{1}{\omega R_i C}\right)$$

Als Zahlenwerte erhält man

$$\underline{U}_C = 219 \cdot e^{-j \cdot 17{,}43} \text{ Volt} \quad ,$$

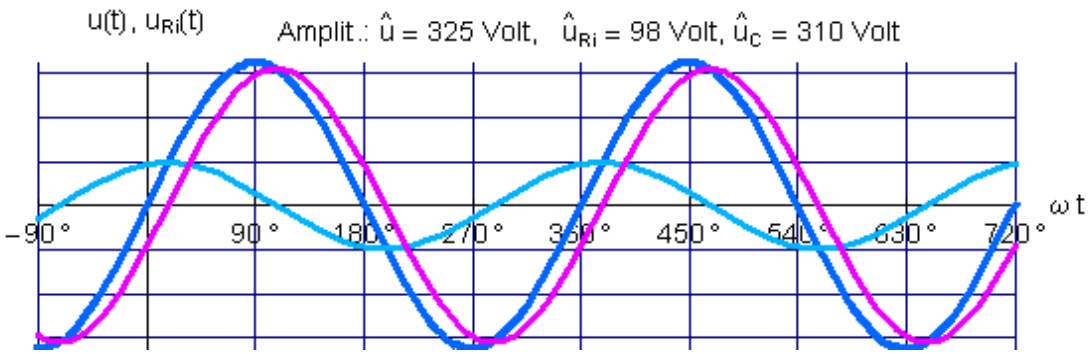
Da der Phasenwinkel negativ ist, **läuft** die Kondensatorspannung der Quellenspannung **nach**.



Die Zeiger $\underline{U}_{Ri}$ und $\underline{U}_C$ stehen im übrigen aufeinander **senkrecht**, wie man den Winkeln entnehmen kann. Daher ist auch

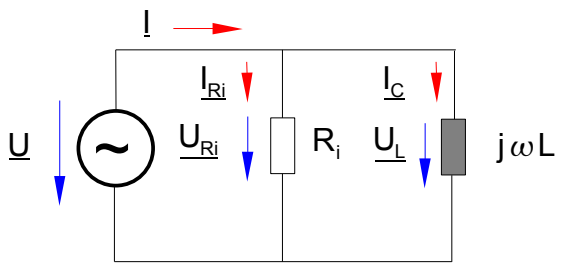
$$|\underline{U}| = \sqrt{(|\underline{U}_{Ri}|)^2 + (|\underline{U}_c|)^2}$$

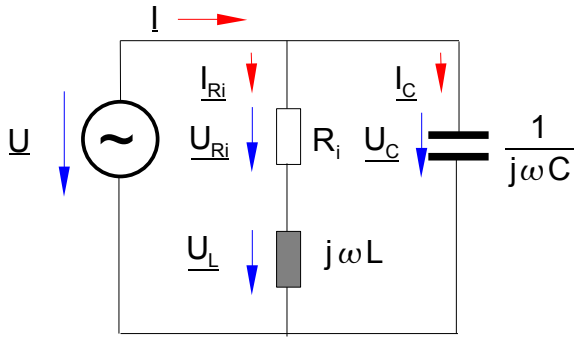
Der zugehörige Zeitverlauf ist der Folgende:



Für die folgenden beiden Schaltungen sind nun mit den Zahlenwerten von zuvor die komplexen

Gesamtwiderstände und die Zeigergrößen aller Spannungen und Ströme zu bestimmen:





5.8 Scheinleistung, Wirkleistung, Blindleistung, Leistungsfaktor

Wie bei Gleichspannungsnetzen kann man auch in Wechselspannungsnetzen Leistungen als Produkt aus Spannung und Strom berechnen. Mit Hilfe der komplexen Spannungs- und Stromzeiger ist die komplexe Leistung $\underline{S}$ als

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot e^{-j\phi} = P + jQ$$

definiert. Dabei bedeutet:

- konjugiert komplexer Stromzeiger: $\underline{I}^* = |\underline{I}| \cdot e^{-j\phi}$
- Scheinleistung: $S = |\underline{S}|$ [V A = Voltampere]
- Wirkleistung: P [Watt]
- Blindleistung: Q [Var]
- Leistungsfaktor $\cos\phi = \frac{P}{|\underline{S}|} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$

V·A, **Var** und **Watt** haben alle die gleiche Dimension Watt, die unterschiedlichen Bezeichnungen dienen nur der Kennzeichnung. Mit Wirkleistung in Watt ist Wärmeleistung (Heizofen) oder mechanische Leistung (Motorleistung) gemeint. Für elektrische Verbraucher ist ein Leistungsfaktor nahe 1,0 erwünscht (geringer Blindleistungsanteil).