Zu DT-Übung 8.2

(Lösungsvorschlag)

Die vollständige Schaltfunktion enthält 4 Spalten mit den 2·2 = 4 Bits a_1, a_0, b_1, b_0 der beiden Zahlen A und B sowie 3 Spalten X, Y und Z für die 3 Fälle

$X = 1 \rightarrow A < B$
$Y = 1 \rightarrow A = B$
$Z = 1 \rightarrow A > B$.

Die 4 Bits treten in 2^4 =16 verschiedenen Permutationen auf, daher sind 16 Zeilen vorzusehen:

Fall	a_1	b_1	a_0	b_0	X A<B	Y A=B	Z A>B
0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0
5	0	1	0	1	1	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0
7	0	1	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0	0	1
10	1	0	1	0	0	0	1
11	1	0	1	1	0	0	1
12	1	1	0	0	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	0
14	1	1	1	0	0	0	1
15	1	1	1	1	0	1	0

Die markierten Permutationen verweisen auf die 6 Fälle A>B. Die Funktion für Z ergibt sich aus der DNF für die 6 Minterme:

$$Z = \overline{a_1}\,\overline{b_1}\,a_0\,\overline{b_0} \vee a_1\,\overline{b_1}\,\overline{a_0}\,\overline{b_0} \vee a_1\,\overline{b_1}\,\overline{a_0}\,b_0 \vee a_1\,\overline{b_1}\,a_0\,\overline{b_0} \vee a_1\,\overline{b_1}\,a_0\,b_0 \vee a_1\,b_1\,a_0\,\overline{b_0} \quad .$$

Diese Funktion lässt sich über das folgende KV-Diagramm vereinfachen. Für die „Einkreisungen“ der Minterme gelten die Regeln:

- Nur senkrecht oder waagerecht benachbarte „1“-Elemente dürfen zusammengefasst werden.

- „1“-Elemente am oberen und unteren Rand (bzw. am linken und rechten Rand) sind benachbart.
- Es dürfen 2, 4 oder 8 „1“-Elemente zusammengefasst werden.
- Minterme können mehrfach eingekreist werden.
- Bereits vollständig durch vorherige Einkreisungen erfasste Minterme werden nicht noch einmal eingekreist → bei jeder neuen Einkreisung muss wenigsten ein neues „1“-Element dazukommen.

	a_1		$\overline{a_1}$		
b_1		1			$\overline{b_0}$
					b_0
$\overline{b_1}$	1	1			
	1	1	1		$\overline{b_0}$
	$\overline{a_0}$	a_0		$\overline{a_0}$	

Ergebnis: $Z=a_1\overline{b_1}\vee a_1\overline{b_0}a_0\vee\overline{b_1}a_0\overline{b_0}$

Frage: Sind gleichwertige Varianten möglich?

Realisierung mit NOR-Gattern:

- Durch doppelte Negation den Gesamtausdruck zum negierten NOR umwandeln:

$$Z=\overline{\overline{a_1\overline{b_1}\vee a_1\overline{b_0}a_0\vee\overline{b_1}a_0\overline{b_0}}}$$

- Die 3 Konjunktionen durch doppelte Negation erweitern:

$$Z=\overline{\overline{\overline{\overline{a_1\overline{b_1}}}\vee\overline{\overline{a_1\overline{b_0}a_0}}\vee\overline{\overline{\overline{b_1}a_0\overline{b_0}}}}}$$

- Auf jede Konjunktion die DeMorganschen Gesetze anwenden:

$$Z=\overline{\overline{\left(\overline{\overline{a_1}\vee b_1}\right)\vee\left(\overline{\overline{a_1}\vee b_0\vee\overline{a_0}}\right)\vee\left(\overline{b_1\vee\overline{a_0}\vee b_0}\right)}}$$

Man benötigt demnach

- 4 NOR-Gatter mit 2 Eingängen (warum 4?) *)
- 3 NOR-Gatter mit 3 Eingängen (warum 3?) **)

Eine andere Realisierung ist mit Hilfe der verkürzten Wahrheitstabelle und 1-Bit-Komparatoren wie im Skript, Kapitel 11.4, Seite 11-4, beschrieben möglich:

Fall	a_1	b_1	a_0	b_0	X	Y	Z
1	$a_1 > b_1$		x	x	0	0	1
2	$a_1 = b_1$		$a_0 = b_0$		0	1	0
3	$a_1 = b_1$		$a_0 > b_0$		0	0	1
4	$a_1 = b_1$		$a_0 < b_0$		1	0	0
5	$a_1 < b_1$		x	x	1	0	0

Frage: Welchen 16 Fällen der vollständigen Tabelle entsprechen diese 5 verkürzten Fälle?

Zusatzaufgabe: Bauen Sie anhand dieser verkürzten Tabelle eine Schaltung mit 1-Bit-Komparatoren und weiteren Logik-Gattern auf.

*) 2 Stück zum Negieren von a_1 und a_0 , 1 Stück für das NOR des ersten Terms und 1 zum Negieren des Gesamtausdrucks

**) 2 Stück für das NOR des zweiten und dritten Terms, 1 Stück für das NOR aller drei Terme